情報数学 III 期末試験 解答　　（2013.7.22 担当：佐藤）

$\boxed{1}$

(1) 連立 1 次方程式

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +3y & -4z & = & -3 \\ x & +2y & -3z & = & -3 \end{array}\right.$$

の解を求める．拡大係数行列を行基本変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

であるから，これは連立 1 次方程式

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & & +z & = & 3 \\ & +y & -2z & = & -3 \end{array}\right.$$

を意味するので，$z = t$（t は任意の実数）とおくと，解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書ける．これは直線のパラメーター表示であり，方向ベクトルは $\underline{(-1, 2, 1)\text{（の定数倍）}}$ である．

(2) (1) の結果から，たとえば，$\underline{(3, -3, 0)\text{ など}}$.

(3) $\vec{n}_1 = (2, 3, -4)$，$\vec{n}_2 = (1, 2, -3)$ とすると，$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-1, 2, 1)$．したがって，$\vec{n}_1$ と $\vec{n}_2$ の両方に直交するベクトルは $\underline{(-1, 2, 1)\text{（の定数倍）}}$ である．

（別解） l の方向ベクトルは $\vec{n}_1$，$\vec{n}_2$ の両方に直交するので，(1) と解は同じになる．

（部分点）(1) において，連立 1 次方程式を解こうとしていれば **1** 点．連立 1 次方程式の解を正しく求めていれば，さらに **1** 点．

$\boxed{2}$

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k-3 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k-3 \\ (-2)\times 5 \\ (-2)\times 2 \end{pmatrix}$$

であるから，$A\vec{v}$ と $\vec{v}$ の第 2 成分，第 3 成分をそれぞれ比べることにより，$\underline{\text{(2) 固有値は } (-2)}$ であることがわかる．

すると，第 1 成分は $(-2) \times (-1) = 2$ となるはずなので，$5k - 3 = 2$ より，$\underline{\text{(1) } k = 1}$ であることがわかる．

（部分点）固有値・固有ベクトルの定義式 $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$ を書いていれば **2** 点．その上で α を求めてい（るのに，それを固有値であると記述していなけ）れば **2** 点（これは (2) の部分点）．また，(2) において，A の（すべての）固有値を求めただけであれば **2** 点．

$\boxed{3}$

(1) $x^2 - 4xy - 2y^2 = 1 \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ である．2 次の項の係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値は 2，-3，固有ベクトルはそれぞれ，$c\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるから，

それぞれノルムが 1 になるように正規化したベクトルを並べた行列 $\underline{P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$ に対して，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ と座標変換すれば，$2\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2 = 1$ となる（つまり，$\underline{\alpha, \beta \text{ は } 2, -3}$ である）．

(2) $2x^2 + 3x + 2y + 3 = 0 \iff 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + 2\left(y + \frac{15}{16}\right) = 0$．したがって，適当に原点を平行移動すれば，$Y = -X^2$ となる．これは $\underline{\text{放物線}}$ である．

（部分点）(1) で 2 次の項の係数行列の固有値を求めていれば **2** 点，固有ベクトルはそれぞれ **1** 点．直交行列，α, β についてはそれぞれ **1** 点．係数行列を間違えていいても，固有値・固有ベクトルの求め方を修得していると思われる場合は計 **4** 点加点した．(2) の理由を「無心 2 次曲線だから」と書いた場合は **2** 点（たとえば $x^2 = 1$ も無心 2 次曲線だが，これは直線である）．

$\boxed{\textbf{4}}$

(1) 視点 V を同次座標で $(8 : -1 : -1 : 1)$ と表すと，透視投影 Φ_V は同次座標系において行列 $\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}$ の積として表される．

(2) 点 A, B, C, D を同次座標でそれぞれ $(-1 : -2 : -3 : 1)$，$(-2 : -1 : 2 : 1)$，$(-3 : 3 : -2 : 1)$，$(-10 : -1 : 0 : 2)$ と表すと

$$\Phi_V(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -17 \\ -25 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{17}{9} \\ -\frac{25}{9} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_V(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 14 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_V(C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 21 \\ -19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{21}{11} \\ -\frac{19}{11} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_V(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -18 \\ -10 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

となる．計算結果と図中の点の位置を比較することにより $\underline{\Phi_V(A) \text{ は（イ）}}$，$\underline{\Phi_V(B) \text{ は（ア）}}$，$\underline{\Phi_V(C) \text{ は（ウ）}}$，$\underline{\Phi_V(D) \text{ は（エ）}}$ であることがわかる．

（部分点）(2) で投影像を求めるために，4 次正方行列と点の同次座標との積を計算していれば各 **1** 点．計算結果が正しければ，2 点の配点とは別に各 1 点ずつ加点した．