

注意事項

- 指定された用紙に解その他を記述し、7月8日(月)に提出すること。
- 答案には解を導き出す過程を必ず書くこと(解だけの場合は加点しない)。解には下線を引いて明示すること。

1 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ について以下の間に答えなさい。

- (1) A の固有多項式 $f_A(t)$ を求めなさい。(2点)
- (2) A の固有値を求めなさい。(2点)
- (3) (2) で求めた各固有値に関する A の固有ベクトルを求めなさい。(4点)
- (4) (2) で求めた各固有値に関する A の固有ベクトルで、ノルムが1のベクトルをそれぞれ1つ挙げなさい。(2点)
- (5) (4) で挙げた単位ベクトルを並べてできる2次正方行列を P とする。 P が直交行列であることを示しなさい。(2点)
- (6) tPAP が対角行列のなることを示しなさい。(2点)

2 2次多項式 $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 5x + y + 6$ について以下の間に答えなさい。(各3点)

- (1) $\varphi(\bar{x} + \lambda, \bar{y} + \mu)$ を計算し、 \bar{x} の係数と \bar{y} の係数を λ, μ を用いて表しなさい。
- (2) $\varphi(\bar{x} + \lambda, \bar{y} + \mu) = \bar{x}^2 + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 + \bar{c}$ となるような λ, μ を求めなさい。また、定数項 \bar{c} の値を求めなさい。
- (3) $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^2 + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 + \bar{c}$ とおく。直交行列 P を用いて $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ と座標変換すると、 $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha\tilde{x}^2 + \beta\tilde{y}^2 + \bar{c}$ となった。このときの直交行列 P と実数 α, β を求めなさい。
- (4) 以上を踏まえて、2次曲線 $\varphi(x, y) = 0$ がどのような形か(楕円, 双曲線, 放物線, またはそのいずれでもないか)を答えなさい。

3 2次多項式 $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 5x + y + 6$ について以下の間に答えなさい。(各3点)

- (1) 2(3) で求めた直交行列 P に対し、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ と座標変換する。このとき、 $\varphi(x, y)$ を \tilde{x}, \tilde{y} に関する2次多項式として表しなさい。
- (2) (1) で求めた2次多項式を $\bar{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ とおく。このとき、 $\bar{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \alpha(\tilde{x} - \tilde{\lambda})^2 + \beta(\tilde{y} - \tilde{\mu})^2 + \bar{c}$ となるような実数 $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ および α, β, \bar{c} を求めなさい。
- (3) (2) で求めた $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ に対し、 $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix}$ と座標変換する。このとき、 $\bar{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ を \bar{x}, \bar{y} の多項式として表し、2(3) で求めた2次多項式と比較しなさい。