情報数学 III 第５回 ~~小テスト~~ レポート 解答　　　　**2013.7.3** 担当：佐藤

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $f_A(t) = \det(tE_2 - A) = \det\begin{pmatrix} t-1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & t-1 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{t^2 - 2t + \frac{3}{4}}}.$

(2) $f_A(t) = (t-\frac{1}{2})(t-\frac{3}{2})$. 固有値は $f_A(t)=0$ の解なので，$\underline{\mathbf{\frac{1}{2}}\ \text{と}\ \mathbf{\frac{3}{2}}}.$

(3) （固有値 $\frac{3}{2}$ のついて）

$\frac{3}{2}E_2 - A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. したがって，固有ベクトルは，$\underline{k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$

（固有値 $\frac{1}{2}$ のついて）

$\frac{1}{2}E_2 - A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. したがって，固有ベクトルは，$\underline{k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$

(4) 例えば，$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

(5) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおけば，${}^tPP = E_2$ を満たす．

(6) 上記の P に対して，${}^tPAP = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 5x + y + 6$.

(1) $\varphi(\bar{x}+\lambda, \bar{y}+\mu) = \bar{x}^2 + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 + (2\lambda+\mu+5)\bar{x} + (\lambda+2\mu+1)\bar{y} + \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 5\lambda + \mu + 6$.

したがって，$\underline{\bar{x}\ \text{の係数は}\ \boldsymbol{2\lambda+\mu+5},\ \bar{y}\ \text{の係数は}\ \boldsymbol{\lambda+2\mu+1}}$.

(2) 連立１次方程式 $\begin{cases} 2\lambda+\mu+5=0 \\ \lambda+2\mu+1=0 \end{cases}$ の解を求めればよい．$\underline{\boldsymbol{\lambda=-3,\ \mu=1}}$.

また，$\lambda=-3$, $\mu=1$ を $\varphi(\bar{x}+\lambda, \bar{y}+\mu)$ の定数項 $\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2+5\lambda+\mu+6$ に代入すると，$\underline{\mathbf{-1}}$ となる．

(3) $\boxed{\mathbf{1}}$の結果から行列 A は $\underline{P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$ によって，${}^tPAP = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ と対角化される．この直交行列 P に対して，$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ と座標変換すると，$\varphi(x,y)=0$ は最終的に $\frac{3\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{2} = 1$ となる．つまり，$\underline{\alpha, \beta\ \text{は}\ \mathbf{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}}$.

(4) これは <u>楕円</u> である．

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $\boxed{\mathbf{3}}$(4) での議論から，2 次の項は $\dfrac{3\tilde{x}^2}{2}+\dfrac{\tilde{y}^2}{2}$ となる．1 次の項は

$$\begin{aligned}
5x+y=&\begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}P\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}\\
=&\frac{6}{\sqrt{2}}x-\frac{4}{\sqrt{2}}y.
\end{aligned}$$

したがって，$\varphi(x,y)$ は

$$\frac{3\tilde{x}^2}{2}+\frac{\tilde{y}^2}{2}+\frac{6}{\sqrt{2}}x-\frac{4}{\sqrt{2}}y+6$$

となる．

(2) 各変数に関して平方完成する．

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(\tilde{x},\tilde{y})=&\frac{3\tilde{x}^2}{2}+\frac{\tilde{y}^2}{2}+\frac{6}{\sqrt{2}}x-\frac{4}{\sqrt{2}}y+6\\
=&\frac{3}{2}\left(\tilde{x}^2+2\sqrt{2}x\right)+\frac{1}{2}\left(\tilde{y}^2-4\sqrt{2}y\right)+6\\
=&\frac{3}{2}\left(\tilde{x}+\sqrt{2}\right)^2-3+\frac{1}{2}\left(\tilde{y}-2\sqrt{2}y\right)^2-4+6\\
=&\frac{3}{2}\left(\tilde{x}+\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\tilde{y}-2\sqrt{2}y\right)^2-1.
\end{aligned}$$

したがって，$\underline{\tilde{\lambda}=-\sqrt{2},\tilde{\mu}=2\sqrt{2}}$，および $\underline{\alpha=\frac{3}{2},\beta=\frac{1}{2},\tilde{c}=-1}$ である．

(3) (2) で求めた $\tilde{\lambda},\tilde{\mu}$ に対し，$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \tilde{\lambda} \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix}$ と座標変換すると，$\tilde{\varphi}(\tilde{x},\tilde{y})$ は $\dfrac{3}{2}\bar{x}^2+\dfrac{1}{2}\bar{y}^2-1$ となり，$\boxed{\mathbf{2}}$(3) で求めた 2 次多項式と等しい．

注意． $\boxed{\mathbf{2}}$では $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と原点の平行移動をした後， $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ と基底を変換しているので，これは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と座標変換していることと同じである．

一方， $\boxed{\mathbf{3}}$では $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ と変換した後， $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ と原点を平行移動しているので，結局これも

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P\left(\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \\ &= P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と座標変換している．以上のことから，$\boxed{\mathbf{2}}$と$\boxed{\mathbf{3}}$の結果が同じになることがわかる．