情報数学 III 中間試験　　学籍番号 | | | | | | | |　　氏名

$\boxed{1}$ [選択] 次の中から 1 つを選び，その定義を述べなさい．(6 点)

(a) ベクトルの内積
(b) 空間ベクトルの外積
(c) 原点 O，基底 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ によって定まる平面の座標系において，「点 P の座標が (x, y) であること」
(d) 直交行列

$\boxed{2}$ 空間ベクトル $\vec{a} = (3, 1, -2), \vec{b} = (1, 1, 2)$ について，次の各問に答えなさい．(各 5 点)

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めなさい．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交するベクトルをひとつ求めなさい．

$\boxed{3}$ [選択] 次の 2 つの中から 1 つ選び，その問に答えなさい．

(a) 方程式 $y = 2x^2 - 4x - 1$ で与えられる座標平面上の曲線を $\mathcal{C}$ とする．この座標系を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と変換（原点の平行移動）すると，$\mathcal{C}$ の方程式は $Y = 2X^2$ になったとする．このとき，a, b の値を求めなさい．(5 点)

(b) 平面の基底 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ と $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ が関係式

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2, \qquad \vec{f}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$$

を満たすとする．$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$-座標系での点 P の座標が $(1, 2)$ のとき，$\{O; \vec{f}_1, \vec{f}_2\}$-座標系での点 P の座標を求めなさい．(10 点)

学籍番号

点/**40** 点

4 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\vec{d}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して，

$$f(\vec{p})=A\vec{p}+\vec{d}$$

で定まるアフィン変換 f について以下の問に答えなさい．

(1) $f(\vec{p})=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる点 $\vec{p}$ を求めなさい．(6 点)

(2) f の逆変換 f^{-1} を $f^{-1}(\vec{p})=B\vec{p}+\vec{e}$ とおくとき，行列 B とベクトル $\vec{e}$ を求めなさい．(8 点)

5 [選択] 次の 3 つの命題の中から 1 つ選んで証明しなさい．

(a) 行列 $R_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ によって定義される線形変換 $f(\vec{p})=R_\theta\vec{p}$ は原点を中心とする回転変換である．(8 点)

(b) 直交行列 A によって定義される線形変換 $g(\vec{p})=A\vec{p}$ は 2 点間の長さを保つ変換である．(8 点)

(c) 任意の空間ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ に対し，外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{a}$ は直交する．(5 点)