# 情報数学 III 中間試験 解答

$\boxed{\mathbf{1}}$

(a) ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に対し，$\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$ をベクトルの内積とよぶ．ただし，$\theta$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角．

(b) 空間ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対し，$(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$ で定義されるベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積とよぶ．

(c) $\overrightarrow{OP}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$ となること．

(d) ${}^tAA=A\,{}^tA=E$ を満たす正方行列 $A$ のこと（ただし，$E$ は単位行列）．

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $(\vec{a},\vec{b})=3\times1+1\times1+(-2)\times2=0$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交する．したがって，$\underline{\theta=\dfrac{\pi}{2}}$．

(2) 外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交する．したがって，解は $\underline{(4,-8,2)\text{（このベクトルの定数倍でもよい）}}$．

$\boxed{\mathbf{3}}$

(a) $y=2x^2-4x-1=2(x-1)^2-3$ であるから，$x-1=X, y+3=Y$ と座標変換すれば $C$ の方程式は $Y=2X^2$ となる．求めるものは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ を満たす $a,b$ なので，解は $\underline{a=1, b=-3}$．

(b) 座標系と座標の定め方から，「$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$-座標系での点 $P$ の座標が $(1,2)$」は $\overrightarrow{OP}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ を意味する．一方，$\{O;\vec{f}_1,\vec{f}_2\}$-座標系での点 $P$ の座標を $(x,y)$ とおくと，

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{f}_1+y\vec{f}_2=x\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2\right)+y\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2\right)=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\vec{e}_1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\vec{e}_2.$$

$\overrightarrow{OP}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ の係数を比較すると

$$\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=1,\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=2$$

を得る．この連立 1 次方程式を解けばよい．これを行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

したがって，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\sqrt{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+1\end{pmatrix}.$$

$\{O;\vec{f}_1,\vec{f}_2\}$-座標系での点 $P$ の座標は $\underline{(\frac{1}{2}+\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+1)}$．

$\boxed{\mathbf{4}}$

(1) $f(\vec{p})=A\vec{p}+\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ より，$A\vec{p}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$．

したがって，$\vec{p}=A^{-1}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}14\\19\end{pmatrix}}$．

(2) $\vec{q} = A\vec{p} + \vec{d}$ のとき，$\vec{p} = A^{-1}\vec{q} - A^{-1}\vec{d}$.

したがって，$f^{-1}(\vec{p}) = B\vec{p} + \vec{e}$ とおくとき，$B = A^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}$，$\vec{e} = -A^{-1}\vec{d} = \underline{\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$

(a) 平面上の点を $\vec{p} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ と極表示する．このとき，

$$f(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) \\ r(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\varphi) \\ r\sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

これは原点を中心として点 $\vec{p}$ が $\theta$ だけ回転したことを意味する．

(b) 2 点 $P, Q$ に対し，$g(P) = P'$，$g(Q) = Q'$ とおく．さらに，$P, Q, P', Q'$ の位置ベクトルを $\vec{p}, \vec{q}, \vec{p'}, \vec{q'}$ とおく．このとき，$A$ が直交行列ならば

$$\begin{aligned}
\overline{P'Q'}^2 =& \|\overrightarrow{P'Q'}\|^2 = \|\vec{q'} - \vec{p'}\|^2 = \|g(\vec{q}) - g(\vec{p})\|^2 = \|A\vec{q} - A\vec{p}\|^2 = \|A(\vec{q} - \vec{p})\|^2 = (A(\vec{q} - \vec{p}), A(\vec{q} - \vec{p})) \\
=& {}^t(A(\vec{q} - \vec{p}))\, A(\vec{q} - \vec{p}) = {}^t(\vec{q} - \vec{p})^t A\, A(\vec{q} - \vec{p}) = {}^t(\vec{q} - \vec{p})E(\vec{q} - \vec{p}) = {}^t(\vec{q} - \vec{p})(\vec{q} - \vec{p}) \\
=& (\vec{q} - \vec{p}, \vec{q} - \vec{p}) = \|\vec{q} - \vec{p}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \overline{PQ}^2
\end{aligned}$$

となり，2 点間の長さを保つことがわかる．なお，上式の 2 行目はベクトルの内積を行列の積として表している．

(c) $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と成分表示すると，$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.

$\vec{a}$ との内積を計算すると，

$$\begin{aligned}
(\vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}) =& a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
=& a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 \\
=& 0.
\end{aligned}$$

したがって，$\vec{a} \times \vec{b}$ は $\vec{a}$ と直交する．