5 同次座標系と透視投影

問題 **5.2.** §5.3.1 を参照せよ．

問題 **5.3.** 一般に，透視投影によって直線は直線に移る（*Mathematica* で実験してみればよい）．しかし，視点 S を通る直線は投影面上の 1 点に移る（つまり，パラメーター表示 $\vec{p}(t) = \vec{s} + t\vec{w}$ の直線に対し，S を視点とする透視投影 Φ による像 $\Phi(\vec{p}(t))$ はパラメーター t に依存しない点となる）．

問題 **5.5.** (5.8) 式の $\vec{u}$ を $\vec{n}$ とすればよい．$\Psi(\vec{p}) = \vec{p} + \dfrac{d - \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$

問題 **5.6.** xy-平面の方程式は $z = 0$ なので，問題 5.5 の解の式において $\vec{n} = (0, 0, 1)$，$d = 0$ とすればよい．

$$\Psi(\vec{p}) = \vec{p} - \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \vec{n} = (p_1, p_2, p_3) - p_1(1, 0, 0) = \underline{(0, p_2, p_3)}.$$

問題 **5.8.** $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 + t\vec{u}$ に対し，$\Psi(\vec{p})$ を計算すると，t に依存しない <u>点</u> となることがわかる．

問題 **5.9.** $S(t) = \vec{s} + t\vec{u}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\Phi_{(S(t),\pi)}(\vec{p}) =& \vec{p} + \frac{d - \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle}{\langle (\vec{v} + t\vec{u}) - \vec{p}, \vec{n} \rangle} ((\vec{v} + t\vec{u}) - \vec{p}) \\
=& \vec{p} + \frac{d - \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle}{\langle (\vec{v} - \vec{p}) + t\vec{u}, \vec{n} \rangle} ((\vec{v} - \vec{p}) + t\vec{u}) \\
=& \vec{p} + \frac{d - \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{v} - \vec{p}, \vec{n} \rangle + t \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle} ((\vec{v} - \vec{p}) + t\vec{u}) \\
=& \vec{p} + \frac{d - \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle}{\frac{1}{t} \langle \vec{v} - \vec{p}, \vec{n} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle} \left(\frac{1}{t} (\vec{v} - \vec{p}) + \vec{u} \right)
\end{aligned}$$

となる．厳密な議論は避け，直感的に極限を解釈する．上の式において $t \to \infty$ とすると，$\dfrac{1}{t}(\vec{v} - \vec{p})$ は $\vec{0}$ ベクトルに収束するので，

$$\lim_{t \to \infty} \Phi_{(S(t),\pi)}(\vec{p}) = \vec{p} + \frac{d - \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle} \vec{u} = \Psi_{(\vec{u},\pi)}(\vec{p}).$$

問題 **5.13.**

$$(1) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u} + \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(2) $$\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & -\vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

問題 **5.14.**

(1) $$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & N & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & MN & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(2) $$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M^{-1} & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

問題 **5.15.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & M & & M\vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

問題 **5.16.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & M^{-1} & & -M^{-1}\vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

問題 **5.17.** (1) $\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$

問題 5.19. 視点 V の同次座標を $(20:6:1:2)$ とすると，平面 $x=0$ への透視投影は行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 20 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 20 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

の積として表される．6 点 A, B, C, D, E, F の同次座標をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

とすると，Φ_V による投影像の同次座標は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ 59 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 26 \\ 61 \\ 22 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -14 \\ 61 \\ 22 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -26 \\ 59 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 40 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 180 \\ 40 \end{bmatrix}$$

となる．これを直交座標に変換すると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{9} \\ \frac{59}{18} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{11} \\ \frac{61}{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{11} \\ \frac{61}{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{13}{9} \\ \frac{59}{18} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

したがって，ワイヤーフレームは下図のようになる．

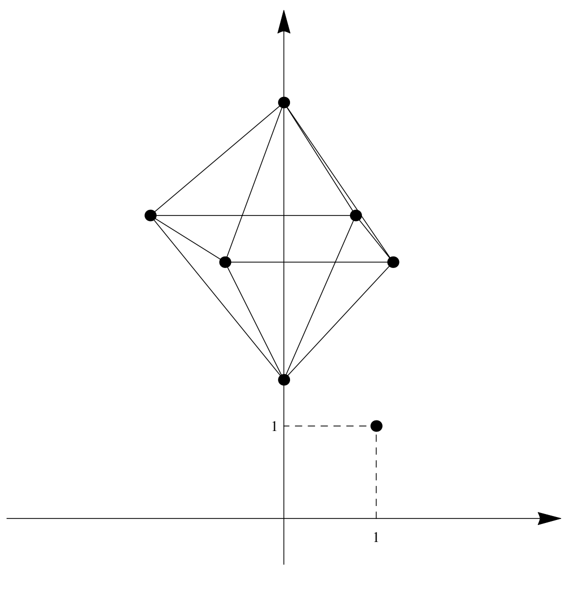

図 3　問題 3.2 のワイヤーフレーム

問題 5.20. 直交行列とは ${}^tA\,A = A\,{}^tA = I_n$ を満たす行列 A のことである．行列を

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

とベクトルが並んだものを見ると，A が直交行列であることは「任意の i, j について，$\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = \delta_{ij}$ が成り立つ」ことと同値である（つまり，すべての列ベクトルが互いに直交する単位ベクトルである）．

3 次の直交行列について考える．空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交し，長さは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がつくる平行四辺形の面積の値に等しい」ベクトルである．もし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が直交する単位ベクトルならば，$\vec{a} \times \vec{b}$ も $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交するので，これらは互いに直交する．さらに，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がつくる平行四辺形は 1 辺の長さが 1 の正方形だから面積は 1 である．以上のことから，行列 $\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{a} \times \vec{b} \end{pmatrix}$ は直交行列であることがわかる．

問題 5.22. 平面 $3x - 4y + 5z = 6$ の法線ベクトルを $\vec{n} = (3, -4, 5)$ とおくと，この方程式は $\vec{n} \cdot \vec{x} = 6$ と書ける．$\vec{n}$ と直交するベクトルとして，$\vec{m} = (4, 3, 0)$ を選ぶと，$\vec{n} \times \vec{m} = (-15, 20, 25) = 5(-3, 4, 5)$．したがって，これらが単位ベクトルになるように正規化し，それを並べて

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とする．また，$\vec{u}$ は $\vec{u} \cdot \vec{n} = 6$ を満たばよいので，例えば，$(2, 0, 0)$ とか $(0, 1, 2)$ など．

問題 5.24. 問題 5.22 の直交行列 M と $\vec{u} = (2, 0, 0)$ に対して，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \vec{u}$ と座標変換する．すると，投影面 π は $x'y'z'$-座標系では方程式 $x' = 0$ となる．

視点 S の同次座標を $(8 : -9 : 6 : 1)$ とし，これを $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-座標系における同次座標で表すと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & M^{-1} & & -M^{-1}\vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} & {}^tM & & -{}^tM\vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42\sqrt{2}}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{12\sqrt{2}}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42\sqrt{2} \\ -3 \\ -12\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix}.$$

よって，$x'y'z'$-座標系における平面 $x' = 0$ への透視投影を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 42\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 12\sqrt{2} & 0 & 42\sqrt{2} & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 42\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

である．

以上のことから，この透視投影 Φ を表す行列は

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 42\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 12\sqrt{2} & 0 & 42\sqrt{2} & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 42\sqrt{2} \end{pmatrix}
\left(\begin{array}{ccc|c} & {}^tM & & -{}^tM\vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
= \underline{\begin{pmatrix} 30\sqrt{2} & 16\sqrt{2} & -20\sqrt{2} & 24\sqrt{2} \\ \frac{27}{\sqrt{2}} & 24\sqrt{2} & \frac{45}{\sqrt{2}} & -27\sqrt{2} \\ -9\sqrt{2} & 12\sqrt{2} & 27\sqrt{2} & 18\sqrt{2} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 45\sqrt{2} \end{pmatrix}}
$$

である．

$P(3, 2, -1)$ の同次座標を $(3; 2 : -1 : 1)$ とすると

$$
\Phi_V(P) = \begin{pmatrix} 30\sqrt{2} & 16\sqrt{2} & -20\sqrt{2} & 24\sqrt{2} \\ \frac{27}{\sqrt{2}} & 24\sqrt{2} & \frac{45}{\sqrt{2}} & -27\sqrt{2} \\ -9\sqrt{2} & 12\sqrt{2} & 27\sqrt{2} & 18\sqrt{2} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 45\sqrt{2} \end{pmatrix}
\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 166\sqrt{2} \\ 39\sqrt{2} \\ -12\sqrt{2} \\ 47\sqrt{2} \end{bmatrix}
= \frac{1}{47}\begin{pmatrix} 166 \\ 39 \\ -12 \end{pmatrix}
$$

である．

実際，$\vec{v} = (8, -9, 6)$，$\vec{n} = (3, -4, 5)$，$d = 6$ として，一般の透視投影の公式 (p.3) を用いて投影像を求めると

$$
\begin{aligned}
\Phi_V(P) =& \vec{p} + \frac{d - \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{v} - \vec{p}, \vec{n} \rangle}(\vec{v} - \vec{p}) \\
=& (3, 2, -1) + \frac{6 - (9 - 8 - 5)}{\langle (5, -11, 7), (3, -4, 5) \rangle}(5, -11, 7) \\
=& (3, 2, -1) + \frac{10}{15 + 44 + 35}(5, -11, 7) \\
=& (3, 2, -1) + \frac{5}{47}(5, -11, 7) \\
=& \frac{1}{47}\left((141, 94, -47) + (25, -55, 35)\right) \\
=& \frac{1}{47}(166, 39, -12)
\end{aligned}
$$

である．

問題 5.26. （省略）