

### 3 点の変換

問題 3.1. (1)

$$\begin{aligned} f_M(\vec{p}(t)) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+t \\ -3+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3t \\ -16+6t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって、像は 直線 である.

(2)

$$\begin{aligned} f_M(\vec{q}(t)) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-3t \\ 3+kt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-(3+2k)t \\ 10+2(3+2k)t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} + (3+2k)t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって、 $3+2k=0$ 、すなわち  $k = -\frac{3}{2}$  ならば、像は  $t$  に関係なく 1 点  $(-5, 10)$  となる.

問題 3.2.  $f_M(\vec{p}(t, s)) = M\vec{a} + tM\vec{v} + sM\vec{u}$  である. したがって、(iii)  $M\vec{v} = \vec{0}$  かつ  $M\vec{u} = \vec{0}$  ならば、 $f_M(\vec{p}(t, s)) = M\vec{a}$  となり、 $t, s$  をいくら動かしても、 $f_M(\vec{p}(t, s))$  は  $M\vec{a}$  から動かない. つまり、平面は 1 点に移る.

(ii)  $M\vec{u} = kM\vec{v} (\neq \vec{0})$  ならば、 $f_M(\vec{p}(t, s)) = M\vec{a} + (t+ks)M\vec{v}$  となり、これは点  $M\vec{a}$  を通り、 $M\vec{v}$  を方向ベクトルとする直線である.

(i) 上記以外の場合、つまり、 $M\vec{u} \neq kM\vec{v}$  かつ、 $M\vec{v}, M\vec{u}$  のどちらも  $\vec{0}$  でない\*4 とき、 $\pi$  の像は平面となる.

問題 3.3. (1)

$$\begin{aligned} f_M(\vec{p}(t, s)) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -9 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t-s \\ 2-2t+s \\ 3+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13-t+2s \\ -34+4t-8s \\ 27-3t+6s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 \\ -34 \\ 27 \end{pmatrix} + (t-2s) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これは点  $(13, -34, 27)$  を通り、方向ベクトルが  $(-1, 4, -3)$  の 直線 である.

(2)  $\vec{p}(t, s) = (1, 2, 3) + t(1, -2, 1) + s(-1, 1, 0)$  より、 $\pi$  の基底は  $\vec{v} = (1, -2, 1), \vec{u} = (-1, 1, 0)$  である. 問題 3.2 の結果より、 $f_{M'}(\vec{p}(t, s))$  が 1 点となるためには、 $M'$  が  $M'\vec{v} = M'\vec{u} = \vec{0}$

\*4 これは  $M\vec{v}, M\vec{u}$  が線形独立の場合に他ならない.

を満たさなくてはならない. ここで,  $M' = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$  とおくと,

$$M'\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 + z_1 \\ x_2 - 2y_2 + z_2 \\ x_3 - 2y_3 + z_3 \end{pmatrix}, \quad M'\vec{u} = \begin{pmatrix} -x_1 + y_1 \\ -x_2 + y_2 \\ -x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

であるから, 3つの連立1次方程式

$$\begin{cases} x_i - 2y_i + z_i = 0 \\ -x_i + y_i = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

を解くことにより,  $x_i = y_i = z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を得る. 例えば,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  など.

**問題 3.4.**  $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $f_A(\vec{p}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  とおく. つまり,  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . 求めるものは  $x, y$  が方程式  $x^2 - y^2 = 1$  を満たすとき,  $x', y'$  の満たす方程式である. 上の関係式から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{pmatrix},$$

つまり,  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$ ,  $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$  である. これを  $x^2 - y^2 = 1$  に代入することにより,  $x'y' = 1$  を得る.

以上のことから,  $x^2 - y^2 = 1$  を  $f_A$  で移した図形の方程式は  $xy = 1$  である.

**問題 3.5.** 各行列  $M$  に対し,  $M\vec{p} = \vec{p}$  を満たす点  $\vec{p} = (x, y)$  を求めればよい.

$$\bullet D_{(a,b)}\vec{p} = \vec{p} \iff \begin{cases} ax = x \\ by = y \end{cases} \iff \begin{cases} (a-1)x = 0 \\ (b-1)y = 0 \end{cases}$$

したがって, 不動点の集合は (i)  $a \neq 1, b \neq 1$  ならば, 原点のみ, (ii)  $a = 1, b \neq 1$  ならば,  $y = 0$  ( $x$  は任意) なので,  $x$  軸上の点全体, 同様に (iii)  $a \neq 1, b = 1$  ならば,  $y$  軸上の点全体 である.

$$\bullet S_a^x \vec{p} = \vec{p} \iff \begin{cases} x + ay = x \\ y = y \end{cases} \iff ay = 0$$

したがって, 不動点の集合は (i)  $a \neq 0$  ならば,  $x$  軸上の点全体, (ii)  $a = 0$  ならば, 平面上の点全体 である (この場合は  $S_0^x = I_2$  なので, 恒等変換である).

$S_a^y$  については,  $S_a^x$  の場合と同様に考えることができるので省略する.

$$\bullet R_\theta \vec{p} = \vec{p} \iff \begin{cases} \cos \theta x - \sin \theta y = x \\ \sin \theta x + \cos \theta y = y \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - \cos \theta)x + \sin \theta y = 0 \\ \sin \theta x - (1 - \cos \theta)y = 0 \end{cases}$$

第1式の両辺に  $(1 + \cos \theta)$  を掛けると,  $\sin \theta \{\sin \theta x + (1 + \cos \theta)y\} = 0$  となる. したがっ

て、(i)  $\sin \theta \neq 0$  ならば、不動点の方程式は

$$\begin{cases} \sin \theta x + (1 + \cos \theta)y = 0 \\ \sin \theta x - (1 - \cos \theta)y = 0 \end{cases}$$

となり、この連立方程式の解は  $x = y = 0$  である。よって、この場合の不動点は 原点のみ である。 $\sin \theta = 0$  ならば、 $\cos \theta = \pm 1$  である。(ii)  $\sin \theta = 0$  かつ  $\cos \theta = -1$  の場合も不動点は 原点のみ である。(iii)  $\sin \theta = 0$  かつ  $\cos \theta = 1$  ならば、不動点は 平面上の点全体 である（この場合は  $R_0 = I_2$  なので、恒等変換である）。

$$\bullet R_\theta \vec{p} = \vec{p} \iff \begin{cases} \cos \theta x + \sin \theta y = x \\ \sin \theta x - \cos \theta y = y \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - \cos \theta)x - \sin \theta y = 0 \\ \sin \theta x - (1 + \cos \theta)y = 0 \end{cases}$$

第1式の両辺に  $(1 + \cos \theta)$  を掛けると、 $\sin \theta \{\sin \theta x - (1 + \cos \theta)y\} = 0$  となる。したがって、(i)  $\sin \theta \neq 0$  ならば、不動点の方程式は  $\sin \theta x - (1 + \cos \theta)y = 0$  である。これは原点を通る 直線 である。特に

$$y = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} x = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{1 + (2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1)} x = \tan \frac{\theta}{2} x$$

であるので、直線の傾きは  $\tan \frac{\theta}{2}$  である。

一方、 $\sin \theta = 0$  のときは、 $\cos \theta = \pm 1$  であるから、(ii)  $\sin \theta = 0$  かつ  $\cos \theta = 1$  のとき、不動点の集合は  $x$  軸上の点全体 であり、(iii)  $\sin \theta = 0$  かつ  $\cos \theta = -1$  のとき、不動点の集合は  $y$  軸上の点全体 である。

以上のことから、鏡映変換の不動点の全体は 直線 をなすことがわかる\*5。

### 問題 3.6.

(1)  $\vec{p}(t) = (t, k)$  は点  $(0, k)$  を通り、方向ベクトルが  $(1, 0)$  の直線である。

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + ak \\ k \end{pmatrix}$  より、 $\vec{p}(t)$  の像は点  $(ak, k)$  を通り、方向ベクトルが  $(1, 0)$  の直線であるが、これは元の直線と同じである。

(2)  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + at \\ t \end{pmatrix}$ .

したがって、 $(x, y) = (k + at, t)$  において、 $t$  を消去することにより  $x = ay + k$  を得る。したがって、 $y$  軸に平行な直線は、せん断  $S_a^x$  によって、傾きが  $\frac{1}{a}$  の直線に移る。

**問題 3.7.** これは直線  $y = \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)x$  に関する鏡映変換を理解するための問題である。鏡映変換の定義を確認しながら、小問を順に解けば（と言っても指示通り計算するだけである）よい。詳細は省略する。

\*5 鏡映変換の定義から、直線  $l$  に関する鏡映の不動点は  $l$  上の点であることがわかる。

問題 3.8. 各行列に対し,  ${}^tAA = I_2$  を満たすかどうか確かめればよい.  $D_{(a,b)}$  は  $a = \pm 1, b = \pm 1$  のときに限り直交行列である.  $S_a^x, S_a^y$  は  $a = 0$  のときに限り直交行列である.  $R_\theta, R_\theta^-$  は任意の  $\theta$  に対して, 直交行列となる ( $D_{(\pm 1, \pm 1)}, S_0^x, S_0^y$  はいずれも,  $R_\theta, R_\theta^-$  の特別な場合である).

問題 3.9. 2次正方行列  $A$  が直交行列であるための (定義式以外の) 必要十分条件は「列ベクトル  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  が正規直交する (ノルムが1で互いに直交する)」ことであった. 列ベクトルのノルムが1であるということから,  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos \varphi \\ \sin \theta & \sin \varphi \end{pmatrix}$  と書くことができる. さらに,  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  は直交するので  $\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = 0$  が成り立つ. 加法定理よりこの式は  $\cos(\theta - \varphi) = 0$  となるので,  $\theta - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  を得る. 特に,  $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$  のときが  $R_\theta$  で,  $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$  のときが  $R_\theta^-$  である.

問題 3.10. この問題は単に右辺と左辺の行列が等しくなることを示せばよいが, それぞれどのような意味を持つか, 以下で述べる.

- (1)  $R_\theta^{(a,b,c)}$  は方向ベクトル  $\vec{v} = (a, b, c)$  の直線を回転軸とする  $\theta$ -回転を与える行列である. 回転の向きは方向ベクトルの向きに対して決まるので, 方向ベクトルの向きを逆にすると回転角の符号が逆になる.
- (2)  $R_{(\alpha, \beta, \gamma)}^-$  は法線ベクトル  $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$  の平面に関する鏡映を与える行列である. たとえ, 法線ベクトルの向きが逆向きになっても, 鏡映面の平面は変わらないので, 変換を与える行列も変わらない.

問題 3.11. これは平面  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$  に関する鏡映変換を理解するための問題である. 鏡映変換の定義を確認しながら, 小問を順に解けば (と言っても指示通り計算するだけである) よい. 詳細は省略する.

問題 3.12.  $y = ax^2$  を  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  方向に平行移動した放物線の方程式は  $y = a(x - v_1)^2 + v_2$  であった.  $C$  の方程式は  $y = 2x^2 + 3x + 1 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$  と式変形できるので, これは  $y = 2x^2$  を  $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$  方向に平行移動したものである. したがって,  $C$  を  $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$  方向に平行移動すれば  $y = 2x^2$  となる. よって, 解は  $a = 2, \vec{d} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right)$ .

問題 3.13. 定義にしたがって, 計算すればよい.

$$f \circ g(\vec{p}) = f(g(\vec{p})) = A_1 g(\vec{p}) + \vec{d}_1 = A_1(A_2 \vec{p} + \vec{d}_2) + \vec{d}_1 = \underline{(A_1 A_2) \vec{p} + (A_1 \vec{d}_2 + \vec{d}_1)}.$$

同様に  $g \circ f(\vec{p}) = \underline{(A_2 A_1) \vec{p} + (A_2 \vec{d}_1 + \vec{d}_2)}$ .

問題 3.14.  $f$  の逆変換を  $f^{-1}(\vec{p}) = B\vec{p} + \vec{e}$  とおく. 問題 3.13 の結果から  $f \circ f^{-1}(\vec{p}) = (AB)\vec{p} + A\vec{e} + \vec{d}$ . しかし,  $f \circ f^{-1}(\vec{p}) = \vec{p}$  だから, 任意のベクトル  $\vec{p}$  に対して,

$$(AB)\vec{p} + A\vec{e} + \vec{d} = \vec{p}$$

が成り立つ. これを  $\vec{p}$  に関する恒等式とみると

$$AB = I_n, \quad A\vec{e} + \vec{d} = \vec{0}$$

が成り立つことがわかる. したがって,  $B = A^{-1}$ ,  $\vec{e} = -A^{-1}\vec{d}$ .

**問題 3.15.** 線形変換の合成は行列の積なので, 以下を計算して示せばよい.

- (1)  $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$  を示せばよい.
- (2)  $R_\theta^- R_\varphi^- = R_{\theta-\varphi}$  を示せばよい.
- (3)  $R_\theta R_{-\theta} = I_2$  を示せばよい.
- (4)  $R_\theta^- R_\theta^- = I_2$  を示せばよい.
- (5)  $R_\theta = R_\varphi^- R_0^-$  を示せばよい.

**問題 3.16.** (以下,  $c$  は零でない実数とする)

- (1) 固有値は  $-2$  と  $1$ .

$-2$  に関する固有ベクトルは  $c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $1$  に関する固有ベクトルは  $c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- (2) 固有値は  $-1$ , 固有ベクトルは  $c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (3) 固有値は  $-3$  と  $0$ .

$-3$  に関する固有ベクトルは  $c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $0$  に関する固有ベクトルは  $c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (4) 固有値は  $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ .

$\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$  に関する固有ベクトルは  $c \begin{pmatrix} \sqrt{5} - 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$  に関する固有ベクトルは  $c \begin{pmatrix} \sqrt{5} + 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  である.

- (5) 固有値は  $1, 2, 3$ . 固有ベクトルはそれぞれ  $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**問題 3.17.**

$$(1) \langle f_A(\vec{v}), \vec{u} \rangle = \langle A\vec{v}, \vec{u} \rangle = {}^t(A\vec{v}) \vec{u} = {}^t\vec{v} {}^tA \vec{u} = {}^t\vec{v} (A\vec{u}) = \langle \vec{v}, A\vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, f_A(\vec{u}) \rangle.$$

$$(2) f_A(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1, f_A(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2, \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ とする. このとき,}$$

$$\langle f_A(\vec{u}_1), \vec{u}_2 \rangle = \langle \lambda_1 \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle.$$

一方, (1) より

$$\langle f_A(\vec{u}_1), \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, f_A(\vec{u}_2) \rangle = \langle \vec{u}_1, \lambda_2 \vec{u}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle.$$

したがって、 $\lambda_1 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$  となり、 $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0$  を得る。 $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$  より、 $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0$  を得る。

- (3) 問題 3.16 の中で対称行列なのは (4) のみである。異なる 2 つの固有値に対応する固有ベクトルが必ず直交することを確認せよ。