3　点の変換

問題 **3.1.** $\mathbb{R}^2$ 内の 2 直線

$$\ell_1:\ \vec{p}(t) = (2+t, -3+2t),$$
$$\ell_2:\ \vec{q}(t) = (1-3t, 3+kt)$$

と，行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ によって定義される線形変換 f_M について次の問に答えなさい．

(1) ℓ_1 を f_M で変換すると，どのような図形になるか答えなさい．

(2) ℓ_2 を f_M で変換すると，その像は 1 点になった．このとき，定数 k を求めなさい．

問題 **3.2.** $\mathbb{R}^3$ 内の平面 $\vec{p}(t,s) = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{u}$ は線形変換によって，平面，直線，1 点のいずれかに移る．M と $\vec{a}, \vec{v}, \vec{u}$ がどのような条件を満たすとき，(i) 平面，(ii) 直線，(iii) 1 点のどれに移るか，説明しなさい

問題 **3.3.** $\mathbb{R}^3$ 内の平面 $\pi : \vec{p}(t,s) = (1+t-s, 2-2t+s, 3+t)$ について以下の問に答えなさい．

(1) 行列 $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -9 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ によって定義される線形変換を f_M とする．f_M で π を変換するとどのような図形になるか答えなさい．

(2) π を 1 点に移す線形変換 $f_{M'}$（つまり，行列 M'）の例を 1 つ求めなさい（具体的に 1 つ与えなさい）．ただし，M' の 0 でない成分が少なくとも 6 個なくてはならないとする．

問題 **3.4.** 方程式 $x^2 - y^2 = 1$ を満たす点 (x,y) の集まりを $\mathcal{C}$ とする．行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ によって定義される線形変換 f_A で $\mathcal{C}$ を変換した図形の方程式を求めなさい．

問題 **3.5.** 2 次正方行列

$$D_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad S^x_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^y_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad R^-_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

は $\mathbb{R}^2$ の拡大・縮小，せん断，回転，鏡映をそれぞれ与える．各変換に対し，不動点[*4]全体の集まりがどのような図形か答えなさい．

[*4] 変換 f の不動点とは $f(P) = P$ を満たす点 P のこと．たとえば，恒等変換 I は任意の点に対し，$I(P) = P$ を満たすので，恒等変換の不動点の全体は平面 $\mathbb{R}^2$ である．

問題 3.6. 問題 3.5 の行列 S_a^x によって定義される $\mathbb{R}^2$ の線形変換（せん断）f について，次の問に答えなさい．

(1) x 軸と平行な直線 $\ell : \vec{p}(t) = (t, k)$（ただし，$k$ は定数）を f で移した像を求めなさい．

(2) y 軸と平行な直線 $m : \vec{q}(t) = (k, t)$（ただし，k は定数）を f で移した像を求めなさい．

問題 3.7. 問題 3.5 の行列 R_θ^- によって定義される線形変換（鏡映）を f とおく．このとき，次の問に答えなさい．

(1) $\vec{p} = (x, y)$ とおき，$f(\vec{p})$ を成分表示しなさい．

(2) ベクトル $\vec{p} - f(\vec{p})$ とベクトル $\left(1, \tan\frac{\theta}{2}\right)$ が直交することを示しなさい．

(3) 点 $\vec{p}$ と点 $f(\vec{p})$ の中点 $\dfrac{1}{2}\left(\vec{p} + f(\vec{p})\right)$ が直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ 上の点であることを示しなさい．

問題 3.8. 問題 3.5 の行列の中で，直交行列となるものをすべて挙げなさい．

問題 3.9. 2 次直交行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & \pm\sin\theta \\ \sin\theta & \mp\cos\theta \end{pmatrix}$ に限ること[*5]を示しなさい．

問題 3.10. 3 次正方行列

$$R_\theta^{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ca + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ca - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix},$$

$$R_{(\alpha,\beta,\gamma)}^- = \begin{pmatrix} 1-2\alpha^2 & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma \\ -2\alpha\beta & 1-2\beta^2 & -2\beta\gamma \\ -2\alpha\gamma & -2\beta\gamma & 1-2\gamma^2 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えなさい．

(1) $R_\theta^{(-a,-b,-c)} = R_{-\theta}^{(a,b,c)}$ であることを示しなさい．

(2) $R_{(-\alpha,-\beta,-\gamma)}^- = R_{(\alpha,\beta,\gamma)}^-$ であることを示しなさい．

問題 3.11. 問題 3.10 の行列 $R_{(\alpha,\beta,\gamma)}^-$（ただし，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$）が定義する線形変換 f について，次の問に答えなさい．

(1) $\vec{p} = (x, y, z)$ に対し，$f(\vec{p})$ を成分表示しなさい．

(2) ベクトル $\vec{p} - f(\vec{p})$ がベクトル (α, β, γ) と平行であることを確かめなさい．

(3) 点 $\vec{p}$ と点 $f(\vec{p})$ の中点 $\dfrac{1}{2}\left(\vec{p} + f(\vec{p})\right)$ が平面 $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ 上の点であることを確かめなさい．

問題 3.12. 座標平面において方程式 $y = 2x^2 + 3x + 1$ を満たす点 (x, y) の集まり（放物線）を $\mathcal{C}$

[*5] つまり，2 次の直交変換は回転か鏡映のいずれかである．

とする．平行移動 $f_{\vec{d}}(\vec{p}) = \vec{p} + \vec{d}$ により，$\mathcal{C}$ を変換した図形の方程式が $y = ax^2$ になった．このとき，ベクトル $\vec{d}$ と定数 a を求めなさい．

問題 3.13. 正方行列 A_1, A_2 とベクトル $\vec{d_1}, \vec{d_2}$ に対し，アフィン変換 f, g を

$$f(\vec{p}) = A_1\vec{p} + \vec{d_1}, \qquad g(\vec{p}) = A_2\vec{p} + \vec{d_2}$$

と定義する．このとき，合成変換 $f \circ g$ および $g \circ f$ を $A_1, A_2, \vec{d_1}, \vec{d_2}$ を用いて表しなさい．

問題 3.14. 正方行列 A とベクトル $\vec{d}$ を用いて

$$f(\vec{p}) = A\vec{p} + \vec{d}$$

と定義されるアフィン変換 f が全単射のとき，f の逆変換 f^{-1} を $A, \vec{d}$ を用いて表しなさい．

問題 3.15. 問題 3.5 の行列 R_θ，R_θ^- が定義する線形変換 (回転と鏡映) をそれぞれそれぞれ f_θ，g_θ とおく．さらに，$R_0^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ が定義する線形変換を h とおく．このとき，次の問に答えなさい．

(1) $f_\theta \circ f_\varphi = f_{\theta+\varphi}$ を示しなさい．
(2) $g_\theta \circ g_\varphi = f_{\theta-\varphi}$ を示しなさい．
(3) $f_\theta^{-1} = f_{-\theta}$ を示しなさい．
(4) $g_\theta^{-1} = g_\theta$ を示しなさい．
(5) $f_\theta = g_\theta \circ h$ を示しなさい．

問題 3.16. 次の行列によって定義される線形変換の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

問題 3.17. 対称行列[*6] A によって定まる線形変換 f_A について，次の問に答えなさい．

(1) 任意のベクトル $\vec{v}, \vec{u}$ に対し，$\langle f_A(\vec{v}), \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, f_A(\vec{u}) \rangle$ が成り立つことを示しなさい．
(2) f_A の 2 つの固有ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ に対し，対応する固有値が異なるならば，$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0$ が成り立つことを示しなさい．
(3) 問題 3.16 の各行列に対し，対称行列か否か判定し，(2) の主張が成り立つことを確かめなさい．

[*6] ${}^tA = A$ を満たす行列を対称行列という．