2　図形の方程式

問題 2.1. 求める平面の基底は

$$\vec{v} = (2,-2,1)-(-1,0,2)=(3,-2,-1),$$
$$\vec{u} = (0,2,-1)-(-1,0,2)=(1,2,-3)$$

である．したがって，パラメーター表示は

$$\vec{p}(t,s)=(-1,0,2)+t(3,-2,-1)+s(1,2,-3)=\underline{(-1+3t+s,-2t+2s,2-t-3s)}^{*1}.$$

問題 2.2. (1) $\vec{v}\times\vec{u}=(8,8,8)=8(1,1,1)$．したがって，法線ベクトルは $\vec{n}=\underline{(1,1,1)}$（のスカラー倍）である．

(2) $\langle \vec{p}-\vec{a},\vec{n}\rangle=(x-(-1))+(y-0)+(z-2)=x+y+z-1$．したがって，この平面の方程式は $\underline{x+y+z=1}$.

問題 2.3. それぞれの直線のパラメーター表示は，ℓ が $\vec{p}(t)=(2t+1,3t+1,t)$，m が $\vec{q}(t)=(-t-1,-t,2t+k)$ となる．これらが交点を持つ，つまり，$\vec{p}(s)=\vec{q}(s')$ を満たす s,s' が存在すると仮定する．このとき，s,s' は

$$2s+1=-s'-1, \qquad 3s+1=-s', s=2s'+k$$

を満たす．第 1 式と第 2 式より，$s=1,s'=-4$ を得る．この s,s' は当然第 3 式においても成立するので，$1=-8+k$，すなわち $\underline{k=9}$ であることがわかる．

問題 2.4. 平面 $5x+2y-3z=0$ と交わらないことから, 求める平面の法線ベクトルは $\vec{n}=(5,2,-3)$ である．点 $(2,-2,1)$ を通るので，求める方程式は $5(x-2)+2(y-(-2))+(-3)(z-1)=0$，すならち，$\underline{5x+2y-3z=3}$ である．

問題 2.5. 直線 ℓ 上の点 A を $\vec{p}(1)=(4,0,2)$ とし[*2]，ℓ の方向ベクトルを $\vec{v}=(3,-2,-1)$ とおく．$(5,1,-2)$ を点 B とし，$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(5,1,-2)-(4,0,2)=(1,1,-4)$ とおく．すると，求める平面は点 A を通り，$\{\vec{v},\vec{u}\}$ を基底とする平面である（図 1）．

法線ベクトルは $\vec{n}=\vec{v}\times\vec{u}=(9,11,5)$ であるから, 方程式は $0=9(x-4)+11(y-0)+5(z-2)=9x+11y+5z-46$，すなわち，$\underline{9x+11y+5z=46}$ である．

問題 2.6. 直線 ℓ の方向ベクトルを $\vec{v}=(3,-2,-1)$，m の方向ベクトルを $\vec{u}=(1,2,-3)$ とする．求める平面は ℓ とも m とも交わらないので，法線ベクトル $\vec{n}$ は $\vec{v}$ とも $\vec{u}$ とも直交する（図 2）．$\vec{v}\times\vec{u}=(8,8,8)=8(1,1,1)$ より，法線ベクトルを $\vec{n}=(1,1,1)$ とする．さらに，点 $(1,-1,1)$ を通るので，方程式は $0=(x-1)+(y-(-1))+(z-1)=x+y+z-1$，すなわち，$\underline{x+y+z=1}$ である．

[*1] パラメーター表示は一意的ではない．
[*2] ℓ 上の点がひとつ欲しいだけであって，$\vec{p}(1)$ である必要はない．

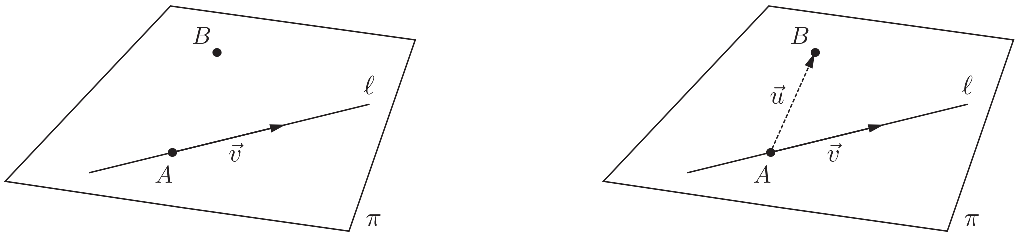

図 1　与えられた点と直線を含む平面

図 2　与えられた 2 直線と交わらない平面

問題 2.7. 連立 1 次方程式を解き，交点の集まりがどのような図形か考察する．連立方程式は，拡大係数行列を行基本変形によって簡約階段行列に変形し，解を求める

(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

したがって，解は $(x, y, z) = (-2, 0, 1)$，つまり，3 つの平面は <u>1 点 $(-2, 0, 1)$ で交わる</u>.

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & 1 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

これは考えている連立方程式が

$$\begin{cases} x + 26z = -4 \\ y - 15z = 3 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と簡約化できることを意味する．②の 2 式に共通に含まれる未知数 z を $z = t$ とおくと $x = -4-26t$, $y = 3+15t$ となる．3 つの平面の交わりはパラメーター表示 $\vec{p}(t) = (-4-26t, 3+15t, t)$ で表される <u>直線</u> である.

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -6 & 12 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -8 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

これは，この連立方程式の解が存在しないことを意味する[*3]．つまり，3 つの平面に共通に含まれる点は 存在しない.

[*3] 連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の解が存在するためには，$\mathrm{rank}(\,A \;\; \vec{b}\,) = \mathrm{rank}(\,A\,)$ でなくてはならない．(3) の問題では，$\mathrm{rank}(\,A \;\; \vec{b}\,) = 3$，$\mathrm{rank}(\,A\,) = 2$ である．したがって，解が存在しない.
また，連立方程式の未知数の数を n とすると，$n - \mathrm{rank}(\,A\,)$ のことを連立方程式の解の自由度といった（もちろん，解が存在するとき）．(2) の問題では，解の自由度は $3 - \mathrm{rank}(\,A\,) = 3 - 2 = \mathbf{1}$ である.