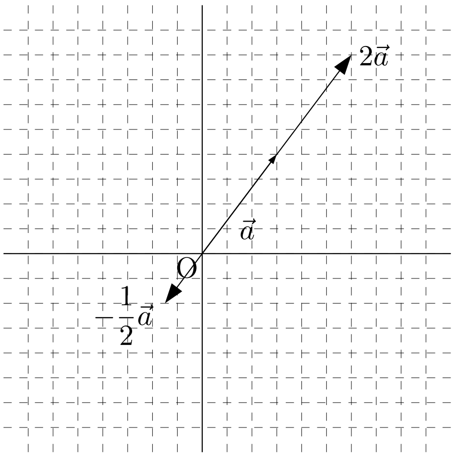
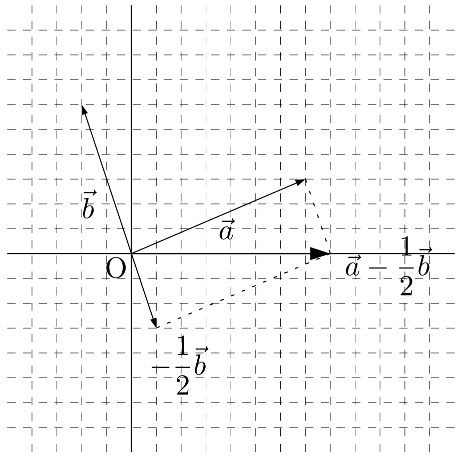
1　座標とベクトル

問題 **1.1.**

(1)



(2)



問題 **1.2.**

(1) $\vec{u}=-\vec{a}+\vec{b}=(-2,-1)+(1,-2)=\underline{(-1,-3)}$. $\|\vec{u}\|=\sqrt{1+9}=\underline{\sqrt{10}}$.

(2) $\vec{u}=\vec{b}+3\vec{a}=(1,-2)+(6,3)=\underline{(7,1)}$. $\|\vec{u}\|=\sqrt{49+1}=\underline{\sqrt{50}}$.

(3) $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}=(4,2)+(-1,2)=\underline{(3,4)}$. $\|\vec{u}\|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=\underline{5}$.

問題 **1.3.** ベクトル $\vec{a}$ と実数 c に対し，$\|c\,\vec{a}\|=|c|\,\|\vec{a}\|$ が成り立つ．例えば，平面ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2)$ に対しては，以下のように確かめられる；

$$\|c\,\vec{a}\|=\sqrt{\langle c\vec{a},c\vec{a}\rangle}=\sqrt{c^2a_1^2+c^2a_2^2}=|c|\sqrt{a_1^2+a_2^2}=|c|\,\|\vec{a}\|.$$

ここで，$|c|$ は実数の絶対値を表し，$\|\vec{a}\|$ はベクトルのノルムを表すことに注意せよ．したがって，$\|c\vec{a}\|=1$ となるためには $c=\pm\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}$ とすればよい．

(1) $\|\vec{a}\|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$. したがって，$c=\underline{\pm\dfrac{1}{\sqrt{34}}}$.

(2) $\|\vec{a}\|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. したがって，$c=\underline{\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

(3) $\|\vec{a}\|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+4}=\sqrt{\dfrac{17}{4}}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. したがって，$c=\underline{\pm\dfrac{2}{\sqrt{17}}}$.

(4) $\|\vec{a}\|=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. したがって，$c=\underline{\pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}}$.

問題 **1.4.** (iii) $\cos\theta$ の値は内積の定義（性質）$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$ を用いて求める．

(1) (i) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+3} = 2, \|\vec{v}\| = \sqrt{4+12} = 4$, (ii) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -2+6 = 4$, (iii) $\cos\theta = \dfrac{4}{2\cdot 4} = \dfrac{1}{2}$ ($\theta = \frac{\pi}{3}$ である).

(2) $\vec{u} = (5,3) + (-4,0) = (1,3)$, $\vec{v} = (-5,-3) + (14,0) = (9,-3)$. (i) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}, \|\vec{v}\| = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$, (ii) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 9-9 = 0$, (iii) $\cos\theta = \dfrac{0}{\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}} = 0$ ($\vec{u}$ と $\vec{v}$ は直交する).

(3) $\vec{u} = (4,0,2) + (-1,1,-3) = (3,1-1)$, $\vec{v} = (-4,0,-2) + (-1,1,-3) = (-5,1-5)$. (i) $\|\vec{u}\| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}, \|\vec{v}\| = \sqrt{25+1+25} = \sqrt{51}$, (ii) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -15+1+5 = -9$, (iii) $\cos\theta = \dfrac{-9}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{51}} = -\dfrac{9}{\sqrt{561}}$ ($\cos\theta < 0$ より，θ は鈍角であるこがわかる).

問題 1.5. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ を満たす c を求める．$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 3 - 2c - c = 3 - 3c$ より，$\underline{c = 1}$.

問題 1.6. 内積 $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle$ および $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle$ は共に 0 である．

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = (1,-5,-2)$
(2) $\vec{a} \times \vec{b} = (-3,-3,1)$

問題 1.7. 空間ベクトルの外積は一般に結合法則を満たさないので (1) と (2) の計算結果は異なる．しかし，一般に $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}$ が成り立つ．

(1) $\vec{b} \times \vec{c} = (1,7,5)$ より，$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \underline{(-11,-2,5)}$.
(2) $\vec{a} \times \vec{b} = (5,5,-5)$ より，$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \underline{(-5,-5,-10)}$.
(3) $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c} = -\vec{b} - 3\vec{c} = \underline{(-11,-2,5)}$.

問題 1.8. 外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交する．したがって，求めるベクトルは $\vec{a} \times \vec{b}$ に平行な単位ベクトルである（問題 1.3 を参照）.

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = (1,2,-3)$，$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$．したがって，求めるベクトルは $\underline{\pm(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}})}$.
(2) $\vec{a} \times \vec{b} = (-2,-5,6)$，$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{4+25+36} = \sqrt{65}$．したがって，求めるベクトルは $\underline{\pm(\frac{2}{\sqrt{65}}, \frac{5}{\sqrt{65}}, -\frac{6}{\sqrt{65}})}$.

問題 1.9. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする．このとき，三角形 OAB の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta$$

と書ける（ただし，$\theta = \angle\mathrm{AOB}, 0 \le \theta \le \pi$）．$\sin\theta \ge 0$ であるから，$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ と書きなおすと

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{2}\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ =& \frac{1}{2}\sqrt{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\cos^2\theta} \end{aligned}$$

となる．内積の定義 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \cos\theta$ を代入することにより，$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$ を得る．

問題 1.10. **問題 1.9** より，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は $\sqrt{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$ に等しい（三角形の面積の 2 倍）．$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と成分表示し，$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2$ と $\|\vec{a}\|^2\,|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$ を計算し，等しくなることを示せばよい（計算の詳細は省略）．

問題 1.11. (1) $\det\left(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$. したがって，$\{\vec{a},\ \vec{b}\ \vec{c}\}$ は空間の基底である．

(2) 求めるものは $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ を満たす数 x, y, z である．これは連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

の解である．拡大係数行列を行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right)$$

となり，①の解が $x = -\dfrac{4}{3}$, $y = 1$, $z = \dfrac{5}{3}$ であることがわかる．したがって，$\underline{\vec{p} = -\dfrac{4}{3}\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{5}{3}\vec{c}}$ と表すことができる．