1　座標とベクトル

問題 1.1. 次のベクトルを原点を始点とする有向線分として各図中に描きなさい．

(1) 図 1 のベクトル $\vec{a}$ に対し，ベクトル $2\vec{a}$ および $-\dfrac{1}{2}\vec{a}$.

(2) 図 2 のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，ベクトル $\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

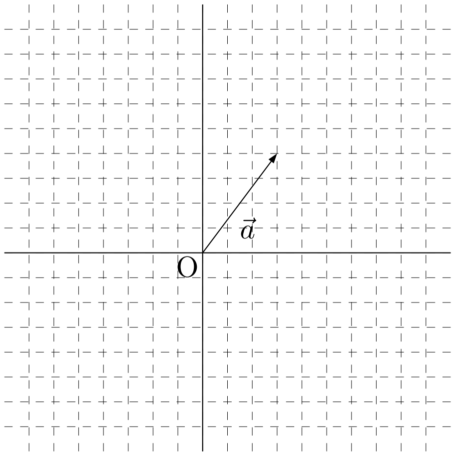


図 1

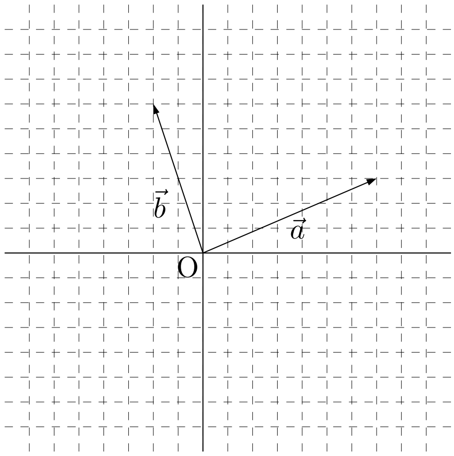


図 2

問題 1.2. 平面ベクトル $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (1, -2)$ に対し，次のベクトル $\vec{u}$ を成分表示しなさい．また，$\vec{u}$ のノルム $\|\vec{u}\|$ を求めなさい．

(1) $\vec{u} = -\vec{a} + \vec{b}$

(2) $\vec{u} = \vec{b} + 3\vec{a}$

(3) $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$

問題 1.3. 次のベクトル $\vec{a}$ に対し，$c\vec{a}$ のノルムが 1 になるような実数 c を求めなさい．

(1) $\vec{a} = (-3, 5)$

(2) $\vec{a} = (1, 1)$

(3) $\vec{a} = (\frac{1}{2}, -2)$

(4) $\vec{a} = (\sqrt{3}, -3)$

問題 1.4. 次のベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ の (i) ノルム $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|$，(ii) 内積 $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ および，(iii) $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角 θ の余弦 $(\cos\theta)$ の値を求めなさい．

(1) $\vec{u} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{v} = (-2, 2\sqrt{3})$

(2) $\vec{a} = (5, 3)$, $\vec{b} = (2, 0)$ に対し，$\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{a} + 7\vec{b}$

(3) $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$ に対し，$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = -2\vec{a} - \vec{b}$

問題 1.5. 空間ベクトル $\vec{a} = (1, c, -1)$ と $\vec{b} = (3, -2, c)$ が直交しているとする．このとき，実数 c の値を求めなさい．

問題 1.6. 次の空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を計算しなさい．また，内積 $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle$ および $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle$ を計算しなさい．

(1) $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$
(2) $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (2, -1, 3)$

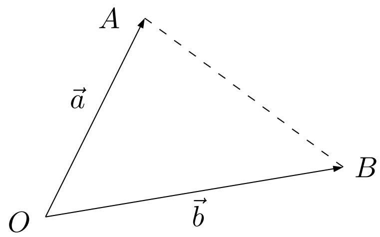
問題 1.7. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$, $\vec{c} = (3, 1, -2)$ に対し，次を計算しなさい．

(1) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$
(2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
(3) $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}$

問題 1.8. 次の空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交し，ノルムが 1 のベクトルを求めなさい．

(1) $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, -1, 0)$
(2) $\vec{a} = (3, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 2)$

問題 1.9. ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を 2 辺とする三角形の面積が $\dfrac{1}{2}\sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$ に等しいことを示しなさい．[*1]



問題 1.10. 空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積が，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の外積のノルム $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ に等しいことを示しなさい．[*2]

問題 1.11. 空間ベクトル $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3, 2)$, $\vec{c} = (2, 1, -1)$ に対して，次の問に答えなさい．

(1) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ が空間の基底であることを示しなさい．
(2) $\vec{p} = (1, 2, -1)$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の線形結合で表しなさい．

[*1] △OAB の面積が $\frac{1}{2}$(OA の長さ) × (OB の長さ) × $\sin\theta$ であること（ただし $\theta = \angle$AOB)，内積の性質 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta$ と三角関数の性質 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて示しなさい．

[*2] **問題 1.9** より，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は $\sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$ に等しい．ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を成分表示し，$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2$ と $\|\vec{a}\|^2 |\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$ が等しいことを示せばよい．