第 4 章

座標変換

座標系とは，平面や空間内の点に数の組を対応させる写像のことだった（第 1 章 1.1 参照）．座標系を定めるには，原点 O と基底 $\{\vec{e}_i\}$ が必要であり，このとり方は無限にあるので，座標系の定め方は一意ではない．ある座標系で座標 (x, y) である点 P は，別の座標系では (x', y') であるとするとき，(x, y) と (x', y') はどのような関係式を満たすだろうか．これを座標系の間の関係（原点の座標，基底の変換行列）を用いて表すことがこの章の目的である．

以下では内容をわかりやすくするために，平面 $\mathbb{R}^2$ の直交座標系の変換について述べる（空間の場合もまったく同様である）．つまり，平面上の点 O と正規直交基底[*1]$\{\vec{e}_i\}_{i=1,2}$ によって定まる座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ の変換について考える．

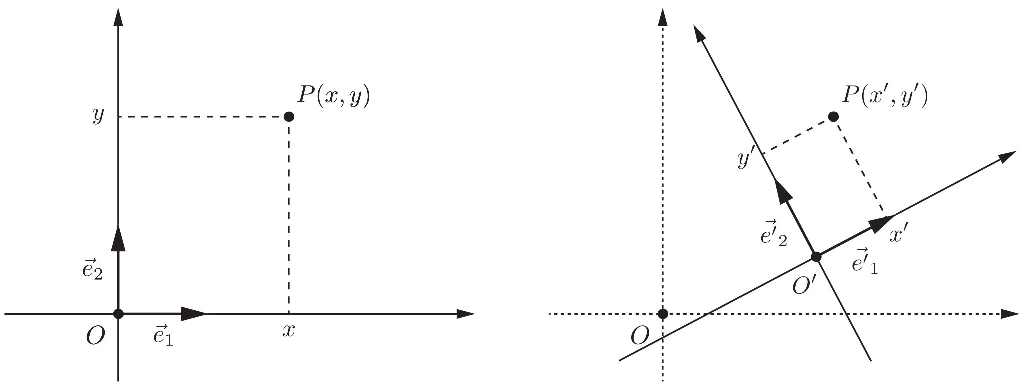

図 4.1　座標系が異なれば，点の座標も異なる

4.1　座標の平行移動

この節では，直交座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ に対し，原点 O を別の点 O' に変えた座標系 $\{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ を与え，この 2 つの座標系における座標の変換（関係）について考える．

*1 $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$，かつ $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$ を満たす平面ベクトルの組のこと．

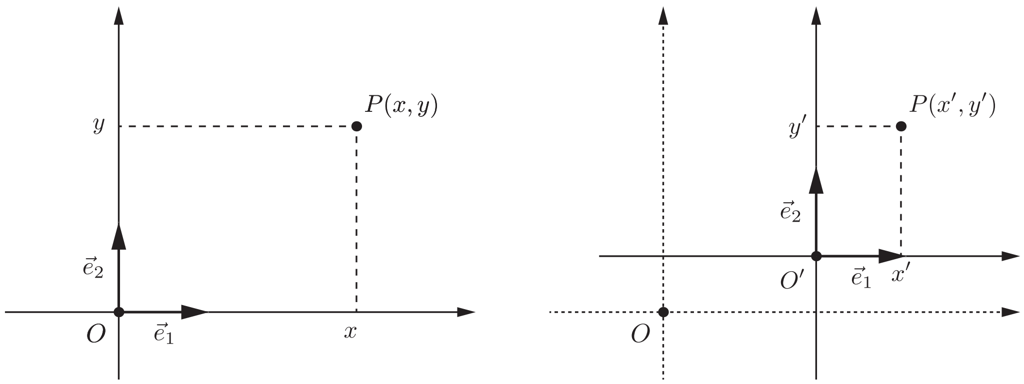

図 4.2　原点のみ移動した座標系

各座標系における点 P の座標をそれぞれ (x,y), (x',y') とする．つまり，

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{O'P} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2.$$

点 O' の $\{O;\, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における座標を (d_1, d_2) とする．つまり，

$$\overrightarrow{OO'} = d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2.$$

このとき，

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \\ &= (d_1'\vec{e}_1 + d_2'\vec{e}_2) + (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) \\ &= (x' + d_1)\,\vec{e}_1 + (y' + d_2)\,\vec{e}_2. \end{aligned}$$

したがって，$x = x' + d_1$，$y = y' + d_2$ を得る．

座標変換の公式（原点の移動）

座標系 $\{O;\, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ において $P(x,y)$，座標系 $\{O';\, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ において $P(x',y')$ とする．さらに，$\{O;\, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ において $O'(d_1, d_2)$ であるとする．このとき，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

例 **4.1.** 座標系 $\{O;\, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ において，方程式 $y = 2x^2 - x + 1$ で与えれる放物線を $\mathcal{C}$ とする．座標系 $\{O';\, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における $\mathcal{C}$ の方程式が $y' = ax'^2$ であるとき，定数 a と点 O' の座標系 $\{O;\, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における座標を求めなさい．

解. 座標系 $\{O;\, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における点 O' の座標を (d_1, d_2) とおくと，座標の変換公式より，

$$x = x' + d_1, \qquad y = y' + d_2$$

となる．これを $y = 2x^2 - x + 1$ に代入すると

$$y' + d_2 = 2(x' + d_1)^2 - (x' + d_1) + 1 \iff y' = 2x'^2 + (4d_1 - 1)x' + (2d_1^2 - d_1 + 1 - d_2)$$

であるから，右辺の x' の係数と定数項が消えるように d_1, d_2 を定めればよい．

しかし，ここでは別の解法を用いる．$\mathcal{C}$ の定義式の右辺をの右辺を平方完成すると

$$y = 2x^2 - x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$$

であるから，$x - \dfrac{1}{4} = x'$，$y - \dfrac{7}{8} = y'$ とおけば，$\mathcal{C}$ の方程式は $y' = 2x'^2$ となる．上の式と座標変換の公式と比較することにより，$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における $\underline{O' \text{の座標が} \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)}$ であることがわかる．

4.2　基底の変換

次に，直交座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ に対し，原点 O は変えずに，基底だけを変えた座標系 $\{O; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ を与え，この 2 つの座標系における座標の変換（関係）について考える．

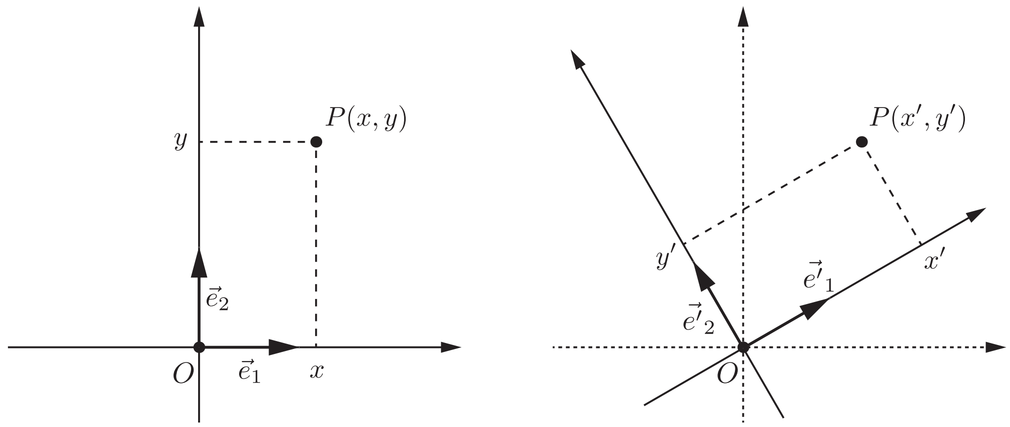

図 4.3　基底を変換した座標系

各座標系における点 P の座標をそれぞれ (x, y)，(x', y') とする．つまり，

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{OP} = x'\vec{e'}_1 + y'\vec{e'}_2.$$

ベクトル $\vec{e'}_i$ $(i = 1, 2)$ も平面ベクトルなので，$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ の線形結合で表すことができる．つまり，

$$\vec{e'}_1 = a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2, \quad \vec{e'}_2 = a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \tag{4.1}$$

となる数 a_1, a_2, b_1, b_2 が存在する．このとき，

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \overrightarrow{OP} &= x'\vec{e'}_1 + y'\vec{e'}_2 \\ &= x'(a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2) + y'(a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) \\ &= (a_1x' + a_2y')\vec{e}_1 + (b_1x' + b_2y')\vec{e}_2 \end{aligned}$$

となり，$x = a_1x' + a_2y'$，$y = b_1x' + b_2y'$ を得る．これは行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x' + a_2y' \\ b_1x' + b_2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

と表すことができる．

ここで，4.2 式右辺の行列は，基底のベクトルを成分とする形式的な 1×2 行列の関係式

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1\vec{e'}_1+b_1\vec{e'}_2 & a_2\vec{e'}_1+b_2\vec{e'}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

に現れる行列と同じ行列である．これを基底の変換行列という．

座標変換の公式（基底の変換）

座標系 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ において $P(x,y)$，座標系 $\{O;\vec{e'}_1,\vec{e'}_2\}$ において $P(x',y')$ とする．さらに，それぞれの基底 $\{\vec{e}_i\}$ と $\{\vec{e'}_j\}$ は

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 \end{pmatrix} M$$

を満たすとする．このとき，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

命題 4.2. 直交座標系を与える 2 つの基底 $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ と $\{\vec{e'}_j\}_{j=1,\dots,n}$ の間の変換行列は直交行列である．つまり，基底が

$$\langle \vec{e}_i,\vec{e}_j\rangle=\delta_{ij},\quad \langle \vec{e'}_i,\vec{e'}_j\rangle=\delta_{ij}$$

を満たすとき，

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 & \cdots & \vec{e'}_n \end{pmatrix} M \tag{4.3}$$

となる行列 M は直交行列である．

Proof. $n=2$ の場合，$M=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ とおくと，$\vec{e'}_j$ は $\vec{e}_i$ の線形結合 (4.1) と表される．M が直交行列であることと

$$a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=1,\quad a_1b_1+a_2b_2=0$$

は同値であるから，これが成り立つことを示せばよい．条件式 (4.1) より

$$\begin{aligned}1 =&\|\vec{e'}_1\|^2=\langle\vec{e'}_1,\vec{e'}_1\rangle=\langle a_1\vec{e}_1+b_1\vec{e}_2, a_1\vec{e}_1+b_1\vec{e}_2\rangle \\ =&a_1^2\|\vec{e}_1\|^2+2a_1b_1\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle+b_1^2\|\vec{e}_2\|^2 \\ =&a_1^2+b_1^2\end{aligned}$$

を得る．同様に，$\|\vec{e'}_2\|^2=1,\langle\vec{e'}_1,\vec{e'}_2\rangle=0$ より，$b_1^2+b_2^2=1$，$a_1b_1+a_2b_2=0$ を得る．

一般の n のときは，ベクトルを成分とする形式的な行列（ベクトル）を考え，この積をベクトルの内積を用いて定義する．例えば，

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{b}_1 \\ \vec{c}_1 & \vec{d}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_2 & \vec{b}_2 \\ \vec{c}_2 & \vec{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle + \langle \vec{b}_1, \vec{c}_2 \rangle & \langle \vec{a}_1, \vec{b}_2 \rangle + \langle \vec{b}_1, \vec{d}_2 \rangle \\ \langle \vec{c}_1, \vec{a}_2 \rangle + \langle \vec{d}_1, \vec{c}_2 \rangle & \langle \vec{c}_1, \vec{b}_2 \rangle + \langle \vec{d}_1, \vec{d}_2 \rangle \end{pmatrix}$$

と定める．右辺の行列は数を成分とする通常の行列であることに注意せよ．このとき，

$$\begin{pmatrix} \vec{e'}_1 \\ \vec{e'}_2 \\ \vdots \\ \vec{e'}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 & \cdots & \vec{e'}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_1 \rangle & \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_n \rangle \\ \langle \vec{e'}_2, \vec{e'}_1 \rangle & \langle \vec{e'}_2, \vec{e'}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e'}_2, \vec{e'}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{e'}_n, \vec{e'}_1 \rangle & \langle \vec{e'}_n, \vec{e'}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e'}_n, \vec{e'}_n \rangle \end{pmatrix} = I_n$$

であるから，(4.3) より

$$\begin{aligned} I_n &= \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 \\ \vec{e'}_2 \\ \vdots \\ \vec{e'}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 & \cdots & \vec{e'}_n \end{pmatrix} = {}^tM \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{pmatrix} M \\ &= {}^tM I_n M \\ &= {}^tM M \end{aligned}$$

となり，M が直交行列であることがわかる．　□

問題 4.3. $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ を平面の直交座標系とする．次の問に答えなさい．

(1) 基底のベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたベクトルをそれぞれ $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ とする（図 4.4 参照）．$\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ を $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ の線形結合で表しなさい．

(2) $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$-座標系において方程式 $x^2 - y^2 = 1$ を満たす点 (x, y) の集まりを $\mathcal{C}$ とする．$\mathcal{C}$ を $\{O, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$-座標系の方程式で表しなさい．

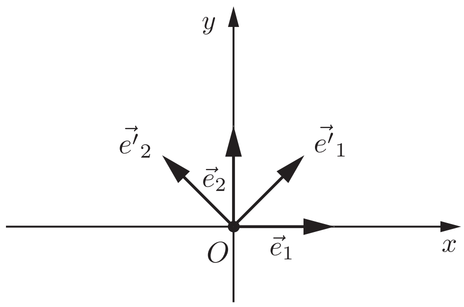

図 4.4　基底を変換した座標系

解.　(1) $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 座標系の単位点をそれぞれ E_1, E_2 とする．すると，$E_1(1,0), E_2(0,1)$ である．$\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ に対し，点 E'_1, E'_2 を $\vec{e'}_1 = \overrightarrow{OE'_1}, \vec{e'}_2 = \overrightarrow{OE'_2}$ となるように定める

と，回転変換の定義より，E_1', E_2' の $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 座標系における座標はそれぞれ

$$R_{\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$
$$R_{\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

となる．したがって，

$$\vec{e'}_1 = \overrightarrow{OE_1'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_2,$$
$$\vec{e'}_2 = \overrightarrow{OE_2'} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_2$$

を得る．

(2) (1) の結果より，$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 \end{pmatrix} M$$

となるので，$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 座標系の座標 (x, y) と $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 座標系の座標 (X, Y) との関係は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \qquad \text{つまり} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}$$

となる．これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入することにより，$\underline{XY = -\frac{1}{2}}$ を得る．

4.3　一般の座標変換

最後に，直交座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ に対し，原点 O と基底 $\{\vec{e}_i\}$ の両方を変えた座標系 $\{O'; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ を考えよう．この 2 つの座標系における座標の変換公式は，前節と前々節の座標変換の「合成」として得られる．つまり，座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ から $\{O'; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ への変換を，

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{O'; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\} \tag{4.4}$$

という 2 つの座標変換に分けて考える．座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における点 O' の座標を (d_1, d_2) とし，基底 $\{\vec{e}_i\}, \{\vec{e'}_j\}$ が

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 \end{pmatrix} M$$

の関係を満たすとする．(4.4) の 3 つの座標系のおける点 P の座標をそれぞれ (x, y), (x', y')，(x'', y'') とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

であるから，(x, y) と (x'', y'') は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

と変換される．

例 **4.4.** ある座標平面（座標系は $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$）において方程式 $y = 2x - 3$ で与えられる直線を ℓ とする．この座標系を別の直交座標系 $\{O'; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ に変換したところ，ℓ の方程式は $Y = 0$ となった．このとき，座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における点 O' の座標と基底の変換行列を求めなさい．

解．直線 ℓ の方程式は行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 = 0$$

と表すことができる．ここで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

と座標変換すると

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \left(M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right) - 3 = 0$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 2d_1 - d_2 - 3 = 0$$

となる．この方程式が $Y = 0$ となるためには，M と d_1, d_2 が

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & k \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

$$2d_1 - d_2 - 3 = 0 \tag{4.6}$$

を満たせばよい．

(4.6) を満たす d_1, d_2 は無限にある．$d_1 = 1, d_2 = -3$ などがその例である．

$M = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}$ とおくと，M が直交行列であることから，

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1, \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \tag{4.7}$$

が成り立つ．さらに，$\vec{n} = (2, -1)$ とおくと，条件 (4.5) は

$$\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = 0, \quad \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle = k \tag{4.8}$$

と同値であることから，(4.7), (4.8) より，$\vec{n}$ と $\vec{a}$ は直交し，$\vec{n}$ と $\vec{b}$ は平行であることがわかる．そこで，$\vec{b} = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$ とし，$\vec{a}$ を $\vec{n}$ と直交する単位ベクトルとすれば，M は (4.5) を満たす直交行列となる．