第 3 章

点の変換

直交座標系を定めた平面，空間をそれぞれ $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ と書く．この章では平面や空間内の変換，つまり，写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を扱う $(n = 2, 3)$．特に，n 次正方行列 M とベクトル $\vec{v}$ を用いて $f(\vec{p}) = M\vec{p} + \vec{v}$ と定義されるアフィン変換の性質を理解し，拡大や縮小，回転などの変換を数学的に表現できるようになることが目標である．

以後，n と書いた場合は 2（平面の場合）または 3（空間の場合）を表すとする．また，点 P とその位置ベクトル $\vec{p}$ を同一視し，$\vec{p}$ をその成分を縦に並べて書く（$n \times 1$ 行列とみなす）．

3.1　線形変換

3.1.1　定義と性質

定義 3.1. n 次正方行列 M に対し，$\vec{p} \mapsto M\vec{p}$ で定義される写像を M によって生成される線形変換といい，f_M と書く（つまり，$f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$f_M(\vec{p}) = M\vec{p}$）．ここで，$M\vec{p}$ は $\vec{p}$ を $n \times 1$ 行列とみなしたときの M との行列の積である．

一般に，写像 f に対し，$f(P)$ を点 P の f による像という．

例 3.2. 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ によって生成される $\mathbb{R}^2$ の線形変換 f_M について次の問に答えなさい．

(1) 点 $P(-2, 3)$ の像 $f_M(P)$ を求めなさい．

(2) パラメーター表示 $\vec{p}(t) = (t - 3, 2t + 1)$ で表される直線を ℓ とする．ℓ の f_M による像がどのような図形になるか考察しなさい．

(3) 方程式 $y = 2x + 7$ で表される直線を m とする．m の f_M による像がどのような図形になるか考察しなさい．

解． (1) $f_M(P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}}$.

(2) $f_M(\vec{p}(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-3 \\ 2t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t-1 \\ 11t-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$．したがって，$\ell$ の f_M による像は，点 $(-1,-5)$ を通り，方向ベクトル $(5,11)$ の $\underline{\text{直線}}$ である．

(3) m の方程式において $x = t$ とおくと，$y = 2t + 7$ である．したがって，m 上の点は $\vec{q}(t) = (t, 2t+7)$ と表すことができる．これは m のパラメーター表示である．これを f_M で変換すると $f_M(\vec{q}(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t+14 \\ 11t+28 \end{pmatrix}$ となる．ここで，$x = 5t+14$, $y = 11t+28$ とおき，t を消去すると $\underline{11x - 5y = 14}$ となる．これが m の f_M による像である直線の方程式である．

例 3.3. パラメーター表示 $\vec{p}(t) = (t-3, 2t+1)$ で表される直線を ℓ とする．行列 $N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ によって生成される $\mathbb{R}^2$ の線形変換 f_M による ℓ の像がどのような図形になるか考察しなさい．

解. (1) $f_N(\vec{p}(t)) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-3 \\ 2t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$．したがって，直線 ℓ は f_M によって $\underline{\text{点 } \left(7, -\frac{3}{2}\right) \text{ に移る}}$．

線形変換は次の性質を満たす．

線形変換の性質

f_M を行列 M によって生成される線形変換とする．このとき，任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ と実数 c に対して，

(1) $f_M(\vec{a} + \vec{b}) = f_M(\vec{a}) + f_M(\vec{b})$,
(2) $f_M(c\,\vec{a}) = c\,f_M(\vec{a})$

が成り立つ．また，どんな線形変換も $f_M(\vec{0}) = \vec{0}$ を満たす．

(1)(2) の性質は行列の和とスカラー倍の線形性による．最後の主張は (2) から直ちに得られる（$c = 0$ とすればよい）．一般に，

定義 3.4. 変換 f に対し，$f(P) = P$ を満たす P を f の不動点という．

つまり，$\vec{0}$ はすべての線形変換の不動点である．

上記の性質 (1)(2) を用いると，例 3.2, 3.3 の問題はより一般的に考えることができる．直線上の点は $\vec{p}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$ $(-\infty < t < \infty)$ と表されるので，これを線形変換すると，

$$f_M(\vec{p}(t)) = f_M(\vec{a} + t\vec{v}) = f_M(\vec{a}) + t f_M(\vec{v}) \tag{3.1}$$

となる．もし，$f_M(\vec{v}) \neq \vec{0}$ ならば，(3.1) の右辺は点 $f_M(\vec{a})$ を通り，方向ベクトルが $f_M(\vec{v})$ の直線を表す．しかし，$f_M(\vec{v}) = \vec{0}$ ならば，(3.1) の右辺は定点 $f_M(\vec{a})$ となるの

で，この場合は直線は f_M によって 1 点につぶれてしまう．一般的に次が成り立つ．

定理 3.5. 直線は線形変換 f_M によって，直線，または 1 点に移される．また，平面は線形変換 f_M によって，平面，直線，または 1 点に移される．

線形変換の性質としては次の事実が本質的である．

定理 3.6. $\mathbb{R}^n$ の変換（写像）$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ と実数 c に対して

$$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}), \qquad f(c\,\vec{a}) = c\,f(\vec{a})$$

を満たすとする．このとき，f は線形変換である．つまり，$f = f_M$ となる行列 M が存在する．

Proof. 平面 $\mathbb{R}^2$ の変換 f について示す（空間の変換についても同様に示せる）．$\mathbb{R}^2$ の基本ベクトルを $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ とすると，任意の点 $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ は線形結合 $\vec{p} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2$ と表される．仮定から

$$f(\vec{p}) = f(p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2) = f(p_1\vec{e}_1) + f(p_2\vec{e}_2) = p_1 f(\vec{e}_1) + p_2 f(\vec{e}_2)$$

となる．$f(\vec{e}_j)$ も $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ の線形結合で表せるので，$f(\vec{e}_j) = a_{1j}\,\vec{e}_1 + a_{2j}\,\vec{e}_2$ となる実数 a_{ij} が定まる[*1]．このとき，

$$\begin{aligned} f(\vec{p}) =& p_1 f(\vec{e}_1) + p_2 f(\vec{e}_2) \\ =& p_1\,(a_{11}\,\vec{e}_1 + a_{21}\,\vec{e}_2) + p_2\,(a_{12}\,\vec{e}_1 + a_{22}\,\vec{e}_2) \\ =& (p_1a_{11} + p_2a_{12})\,\vec{e}_1 + (p_1a_{21} + p_2a_{22})\,\vec{e}_2 \end{aligned}$$

つまり，$f(\vec{p})$ を成分表示すると

$$f(\vec{p}) = \begin{pmatrix} p_1a_{11} + p_2a_{12} \\ p_1a_{21} + p_2a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

となり，f は行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ によって生成される線形変換であることがわかる．　□

3.1.2　主な線形変換

恒等変換

定義 3.7. 単位行列 I_n によって生成される線形変換を恒等変換といい，I と書く．つまり，I は任意の点 $\vec{p}$ に対し，$I(\vec{p}) = \vec{p}$ を満たす変換である．

[*1] この数 $\{a_{ij}\}$ は座標系と f にのみ依存して決まる．

拡大・縮小，相似変換

対角行列

$$D_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad (a, b \neq 0) \tag{3.2}$$

は平面内の図形の拡大や縮小，相似変換を表す（裏返りも含む）．たとえば，行列 $D_{(a,1)}$ に対し，

$$D_{(a,1)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ y \end{pmatrix}$$

であるから，$D_{(a,1)}$ から定まる線形変換によって，点は x 軸方向にのみ移動する（a 倍される）．$|a| > 1$ のときは x 軸方向の拡大変換となり（図 3.1(i)），$0 < |a| < 1$ のときは x 軸方向の縮小変換となる．ただし，a が負のときは図形が裏っ返しになるこに注意せよ (図 3.1(ii))．

同様に，$D_{(1,b)}$ から定まる線形変換は y 軸方向の拡大・縮小である（図 3.1(iii)）．$D_{(a,a)}\,(= aI_2)$ は相似拡大（$|a| > 1$）または，相似縮小（$0 < |a| < 1$）を定める（図 3.1(iv)）．

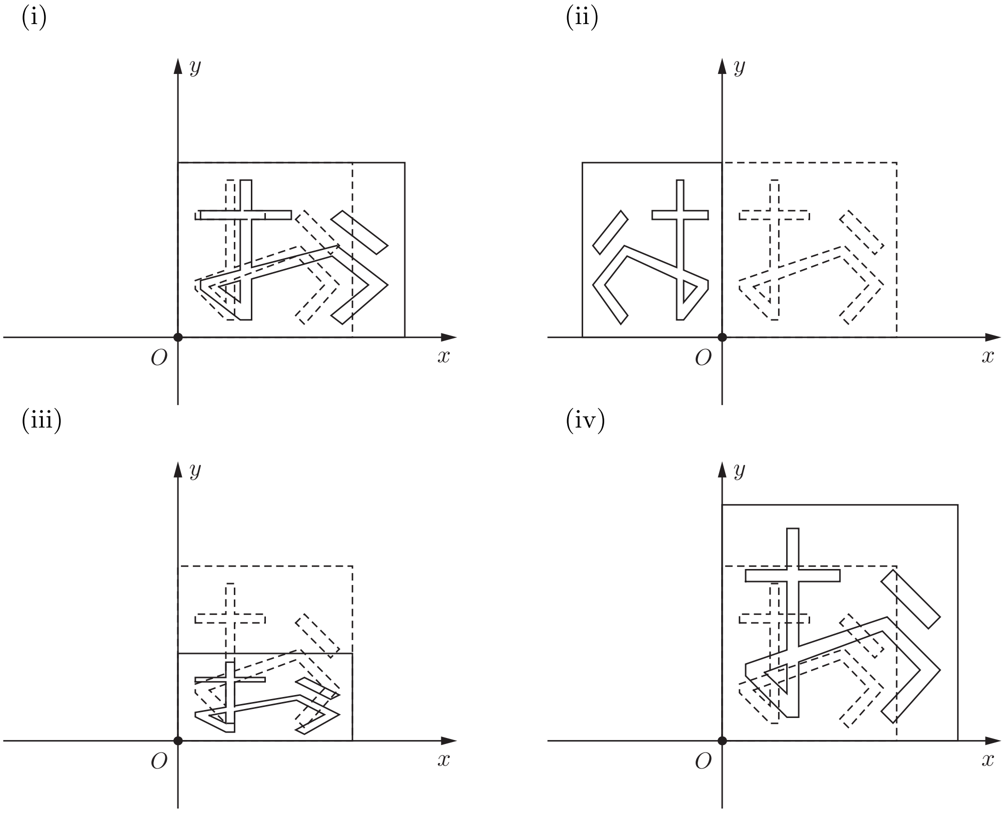

図 3.1　平面における拡大・縮小と相似変換

空間 $\mathbb{R}^3$ における拡大・縮小・相似変換は対角行列

$$D_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad (a, b, c \neq 0) \tag{3.3}$$

によって定義される．

せん断

対角成分がすべて 1 の三角行列

$$S_k^x = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_k^y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

が定める線形変換をせん断とよぶ．

せん断とは，どのような変換か考える．行列 S_k^x に対し，

$$S_k^x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ky \\ y \end{pmatrix}$$

であるから，S_k^x から定まる線形変換によって，点は x 軸方向にずれる．ただし，ずれ幅は点の y 座標に依存し，ずれの方向は k の符号に依存する（図 3.2 左）．同様に，行列 S_k^y が定める線形変換によって，点は y 軸方向にずれる（図 3.2 右）．

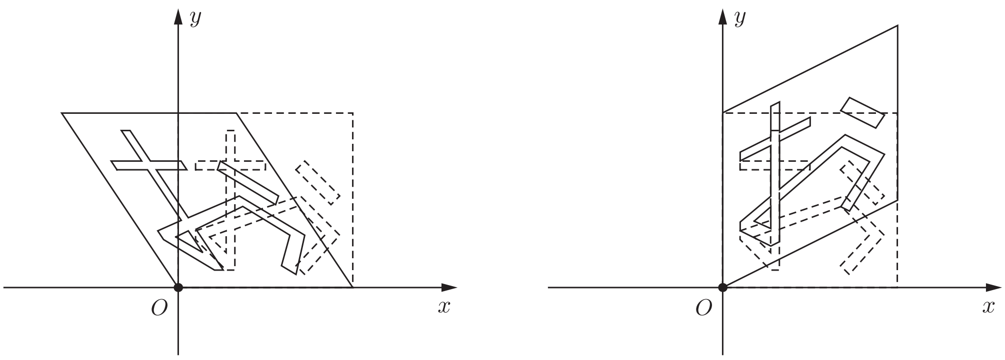

図 3.2 平面におけるせん断

同様に，空間 $\mathbb{R}^3$ のせん断とは，3 次三角行列

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{3.5}$$

によって定義される線形変換をのことをいう．

回転変換

実数 θ に対し，行列

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

が定める線形変換は平面の原点を中心とする，角度 θ の回転（反時計回り）を与えることを示す．

平面の任意の $P(x,y)$ は，$(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ と表すことができる（これを平面上の点の極表示という）．ここで，r は原点からの距離（つまり，$r = \|\overrightarrow{OP}\|$）で，$\varphi$ は x 軸と線分 OP とのなす角（図 3.3 を参照）である．

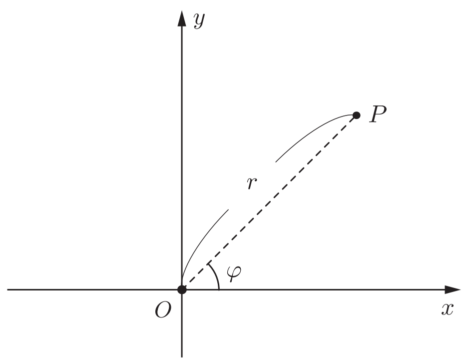

図 3.3　平面上の点の極表示

すると，三角関数の加法定理から

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\theta) \\ r\sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix}$$

となるが，これは反時計周りにちょうど θ だけ回転していることを意味する（図 3.4 左）．

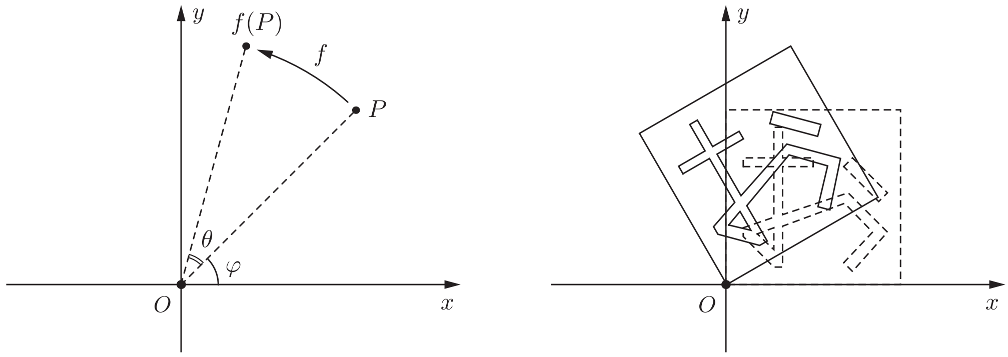

図 3.4　原点を中心とする角度 θ の回転変換

空間 $\mathbb{R}^3$ では，直線 ℓ（方向ベクトルは単位ベクトル $\vec{v}$）が与えられると，それを軸とする θ-回転が次のように定義できる（図 3.5 左）; 点 P に対し，P を通り $\vec{v}$ を法線ベクトル

する平面を π とし，π と ℓ の交点を O' とする．このとき，点 O' を中心とする平面 π 上の θ-回転を P に施した点 Q を，P の ℓ に関する θ-回転像と定義する（図 3.5 右）．特に，x 軸，y 軸，z 軸を回転軸とする回転変換は以下の行列によって与えられる;

$$R_\theta^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ R_\theta^y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},\ R_\theta^z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

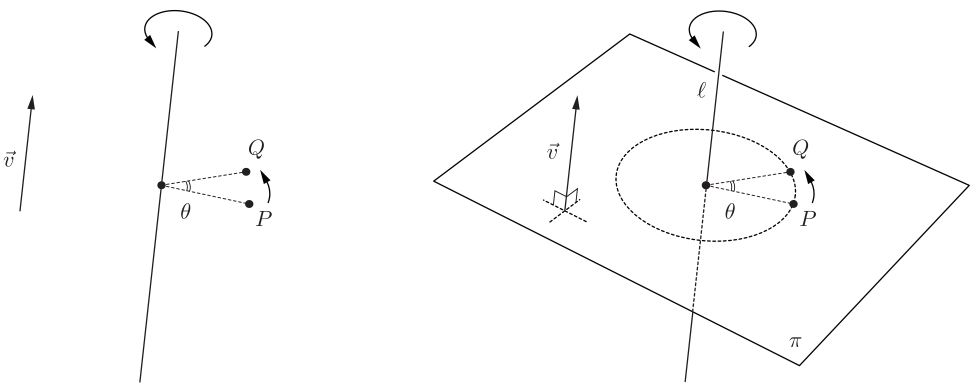

図 3.5　空間内の直線 ℓ を回転軸とする角度 θ の回転変換

一般に，原点を通り方向ベクトルが $\vec{v} = (a, b, c)$ （ただし，$\vec{v}$ は単位ベクトルとする．つまり $a^2 + b^2 + c^2 = 1$）の直線を回転軸とする θ-回転は行列

$$\begin{aligned} R_\theta^{(a,b,c)} &= \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ca + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ca - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix} \\ &= \cos\theta\, I_3 + (1-\cos\theta)\begin{pmatrix} a^2 & ab & ca \\ ab & b^2 & bc \\ ca & bc & c^2 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.8}$$

によって与えられる線形変換である．

鏡映変換

平面内の原点を通る直線 ℓ に対し，次のように変換 f を定義する; 点 P に対し，P を通り ℓ に直交する直線を m とする．このとき，点 $f(P)$ を (i) m 上の点で，(ii) P と $f(P)$ の中点が ℓ と m との交点となるように定める（図 3.6 左）．このようにして定まる変換 $f : P \mapsto f(P)$[*2]を直線 ℓ に関する鏡映とよぶ．

鏡映は，行列

$$R_\theta^- = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

[*2] この変換は，ℓ が原点を通らない直線であっても定義できるが，この場合は線形変換にならない．

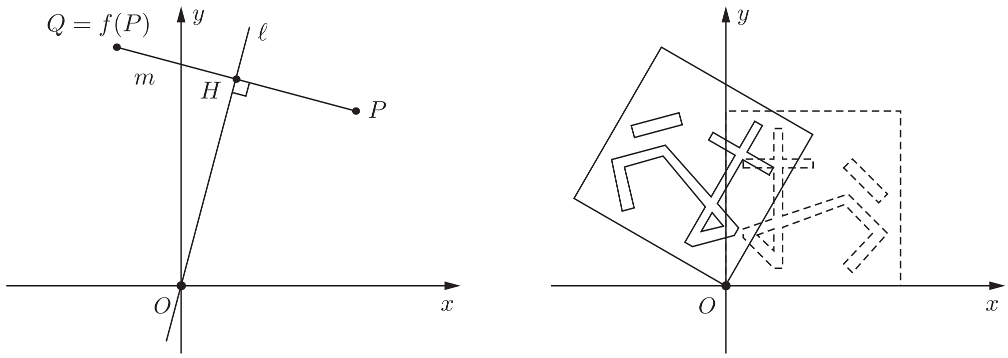

図 3.6　$\mathbb{R}^2$ 内の直線 ℓ に関する鏡映変換

によって定義される線形変換である[*3]．特に，

$$R_0^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad R_\pi^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ x 軸，y 軸に関する鏡映である．

空間 $\mathbb{R}^3$ においても，原点を通る平面 π に関する同様の変換を定義することができる．つまり，点 P に対し，点 P を通り π に直交する直線を m とする．このとき，点 $f(P)$ を (i) m 上の点で，(ii) P と $f(P)$ の中点が π と m の交点となるように定める．このようにして定まる変換 $f : P \mapsto f(P)$ を平面 π に関する鏡映とよぶ．

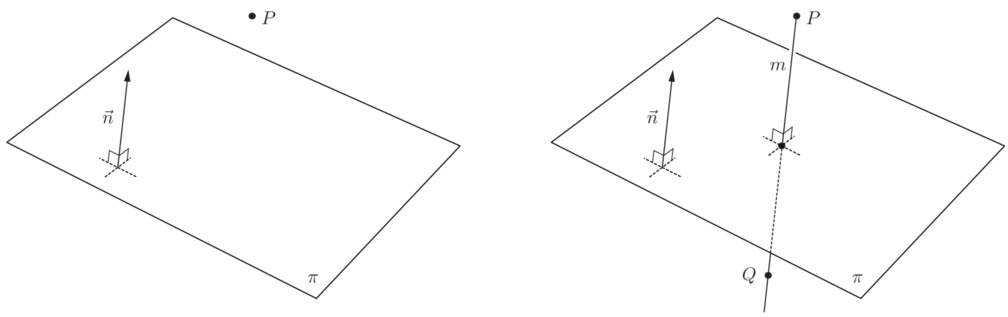

図 3.7　空間内の平面 π に関する鏡映

平面 π の法線ベクトルが $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ のとき（ただし，$\vec{n}$ は単位ベクトルとする．つまり，$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$），$\pi$ に関する鏡映は，行列

$$R^-_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \begin{pmatrix} 1-2\alpha^2 & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma \\ -2\alpha\beta & 1-2\beta^2 & -2\beta\gamma \\ -2\alpha\gamma & -2\beta\gamma & 1-2\gamma^2 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

によって定義される線形変換である[*4]．

[*3] 鏡映が線形変換であるという事実については第 3 節で述べる．

[*4] 空間内の平面に関する鏡映も，一般の平面に対して定義できるが，原点を通らない平面の場合は線形変換にならない．

直交変換

定義 3.8. n 次正方行列で，${}^tA\,A = A\,{}^tA = I_n$ を満たす行列 A を直交行列という（ただし，${}^tA$ は行列 A の転置行列を表す）．直交行列 A によって生成される線形変換 f_A を直交変換という．

定理 3.9. A を直交行列とする．このとき，直交変換 f_A は以下を満たす;

(1) f_A は内積を保つ．すなわち，任意のベクトル $\vec{v}, \vec{u}$ に対し，$\langle f_A(\vec{v}), f_A(\vec{u})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$ が成り立つ．

(2) f_A は 2 点間の距離を保つ．すなわち，任意の点 P, Q に対し，$P' = f_A(P), Q' = f_A(Q)$ とすると，$|PQ| = |P'Q'|$ が成り立つ．

Proof. (1) ベクトル $\vec{p}, \vec{q}$ を $n \times 1$ 行列 $(n = 2, 3)$ とみなすと，内積 $\langle \vec{p}, \vec{q}\rangle$ は行列の積 ${}^t\vec{p}\,\vec{q}$ と解釈することができる．例えば，空間ベクトル $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ に対し，

$${}^t\vec{p}\,\vec{q} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \end{pmatrix}$$

となり，上式の右辺は 1×1 行列であるが，これを実数（スカラー）と同一視すると，$\langle \vec{p}, \vec{q}\rangle$ に等しいことがわかる．この同一視の下で，直交行列 A に対し $\langle f_A(\vec{v}), f_A(\vec{u})\rangle$ を計算すると

$$\langle f_A(\vec{v}), f_A(\vec{u})\rangle = {}^t(A\vec{v})\,(A\vec{u}) = \left({}^t\vec{v}\,{}^tA\right)\,(A\,\vec{u}) = {}^t\vec{v}\,\left({}^tA\,A\right)\,\vec{u} = {}^t\vec{v}\,I_n\,\vec{u} = {}^t\vec{v}\,\vec{u} = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$$

となり，f_A が内積を保存することがわかる[*5]．

(2) 点 P, Q の位置ベクトルを $\vec{p}, \vec{q}$ をすると，

$$|PQ| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\vec{q} - \vec{p}\| = \sqrt{\langle \vec{q} - \vec{p}, \vec{q} - \vec{p}\rangle}$$

である．一方，

$$\begin{aligned} |P'Q'| &= \|\overrightarrow{P'Q'}\| = \|f_M(\vec{q}) - f_M(\vec{p})\| = \|f_M(\vec{q} - \vec{p})\| \\ &= \sqrt{\langle f_M(\vec{q} - \vec{p}), f_M(\vec{q} - \vec{p})\rangle} \end{aligned}$$

となり，(1) の結果より，$|P'Q'| = \sqrt{\langle \vec{q} - \vec{p}, \vec{q} - \vec{p}\rangle} = |PQ|$ を得る． □

注意 3.10. 内積を保存する線形変換は直交変換に限る．

[*5] 2 つ目の等号は，積の転置の性質 ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ を使っている．

定理 3.11. A を n 次直交行列とする．このとき，以下が成り立つ;

(1) A は正則行列である．
(2) 行列式の値は $\det(A) = \pm 1$.
(3) A の第 i 列を成分とするベクトルを $\vec{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とすると，$\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = \delta_{ij}$ が成り立つ．

Proof. 直交行列の定義式から，$A^{-1} = {}^tA$ なので，(1) は明らかである．

一般に，任意の正方行列 A, B に対し，

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B), \qquad \det({}^tA) = \det(A)$$

が成り立つ．したがって，A が直交行列ならば，

$$1 = \det(I_n) = \det({}^tA\,A) = \det({}^tA) \times \det(A) = \det(A) \times \det(A)$$

となり，$(\det(A))^2 = 1$ を得る[*6]．

次に，直交行列が正規直交基底と関係があることを述べる．そのために，行列を「(列) ベクトルを並べたもの」とみる．例えば，行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ は 2 つのベクトル $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$，$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ が並んだ行列 $\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{pmatrix}$ と見なすことができる．すると，一般の行列 $A = (\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\cdots\,\vec{a}_n)$，$B = (\vec{b}_1\,\vec{b}_2\,\cdots\,\vec{b}_n)$ に対し，

$$\begin{aligned} {}^tB\,A &= \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1 \\ {}^t\vec{b}_2 \\ \vdots \\ {}^t\vec{b}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1\,\vec{a}_1 & {}^t\vec{b}_1\,\vec{a}_2 & \cdots & {}^t\vec{b}_1\,\vec{a}_n \\ {}^t\vec{b}_2\,\vec{a}_1 & {}^t\vec{b}_2\,\vec{a}_2 & \cdots & {}^t\vec{b}_2\,\vec{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t\vec{b}_n\,\vec{a}_1 & {}^t\vec{b}_n\,\vec{a}_2 & \cdots & {}^t\vec{b}_n\,\vec{a}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \vec{b}_1, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{b}_1, \vec{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{b}_1, \vec{a}_n \rangle \\ \langle \vec{b}_2, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{b}_2, \vec{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{b}_2, \vec{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{b}_n, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{b}_n, \vec{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{b}_n, \vec{a}_n \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので，A が直交行列ならば，${}^tA\,A$ の (i, j) 成分は $\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle$ 等しく，${}^tA\,A = I_n$ であることから，$\langle \vec{a}_i, \vec{a}_\rangle = \delta_{ij}$ を得る． □

[*6] 直交行列ならば，行列式が ± 1 となるのであって，$|\det(A)| = 1$ だからといって A が直交行列とは限らないことに注意せよ．たとえば，せん断を定義する行列 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $a \neq 0$ のとき直交行列ではないが，行列式の値は 1 である．

3.2 平行移動

定義 3.12. ベクトル $\vec{v}$ に対し，$\vec{p} \mapsto \vec{p} + \vec{v}$ で定義される変換を $\vec{v}$ 方向への平行移動といい，$f_{\vec{v}}$ と書く（つまり，$f_{\vec{v}}(\vec{p}) = \vec{p} + \vec{v}$）.

注意 3.13. $\vec{v} = \vec{0}$ のとき，$f_{\vec{v}}$ は恒等変換 I_n である.

定理 3.14. 平行移動 $f_{\vec{v}}$ は以下の性質を満たす;

(1) $\vec{v} \neq \vec{0}$ のとき，$f_{\vec{v}}$ は不動点を持たない.

(2) $f_{\vec{v}}$ は 2 点間の距離を保つ．すなわち，任意の点 P, Q に対し，$P' = f_{\vec{v}}(P), Q' = f_{\vec{v}}(Q)$ とすると，$|PQ| = |P'Q'|$ が成り立つ.

Proof. (1) $\vec{p}$ が $f_{\vec{v}}$ の不動点ならば，$\vec{p} = f_{\vec{v}}(\vec{p}) = \vec{p} + \vec{v}$，つまり $\vec{v} = \vec{0}$ となるので，定理の仮定に矛盾する.

(2) 点 P, Q の位置ベクトルを $\vec{p}, \vec{q}$ とすると，

$$|P'Q'| = \|\overrightarrow{P'Q'}\| = \|f_{\vec{v}}(\vec{q}) - f_{\vec{v}}(\vec{p})\| = \|(\vec{q} + \vec{v}) - (\vec{p} + \vec{v})\| = \|\vec{q} - \vec{p}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = |PQ|.$$

□

例 3.15. 座標平面上の方程式 $y = ax^2$ を満たす点 (x, y) 全体のなす図形（つまり放物線）を C とする．$\vec{v} = (v_1, v_2)$ によって定まる平行移動 $f_{\vec{v}}$ による C の像の方程式を求めなさい.

解. C 上の点を $\vec{x} = (x, y)$ とおき，$\vec{x}$ の $f_{\vec{v}}$ による像 $f_{\vec{v}}(\vec{x})$ を $\vec{X} = (X, Y)$ とおく．つまり，$(X, Y) = (x, y) + (v_1, v_2) = (x + v_1, y + v_2)$．$\vec{x}$ は C 上の点であるから $y = ax^2$ を満たす．$x = X - v_1$, $y = Y - v_2$ を $y = ax^2$ に代入すると，$(Y - v_2) = a(X - v_1)^2$．したがって，$f_{\vec{v}}$ による C の像の方程式は $\underline{y = a(X - v_1)^2 + v_2}$ である.

3.3 合成変換と逆変換

3.3.1 合成変換

定義 3.16. 2 つの変換 f と g に対し，

$$\vec{p} \longmapsto f(g(\vec{p}))$$

で定義される変換を f と g の合成変換とよび，$f \circ g$ で表す.

例 3.17. (1) n 次正方行列 A, B に対し，

$$f_A \circ f_B(\vec{p}) = f_A(f_B(\vec{p})) = f_A(B\vec{p}) = A(B\vec{p}) = (AB)\vec{p} = f_{AB}(\vec{p}).$$

つまり，$f_A \circ f_B = f_{AB}$ が成り立つ．

(2) 平行移動については，ベクトル $\vec{v}, \vec{u}$ に対し，$f_{\vec{v}} \circ f_{\vec{u}} = f_{\vec{v}+\vec{u}}$ が成り立つ（証明は省略）．

一般に，2 つの変換 f, g に対して，$f \circ g \neq g \circ f$ であることに注意せよ[*7]．

平面における鏡映と回転

$\mathbb{R}^2$ 内の原点を通る直線 ℓ に関する鏡映変換は行列

$$R_\theta^- = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

によって定まる線形変換であることを示す．

この鏡映を f とし，ℓ と x 軸とのなす角を φ とする（図 3.8 左）．x 軸に関する鏡映変換を g とすると，$g(x,y) = (x,-y)$ より，g は行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ によって定まる線形変換である．

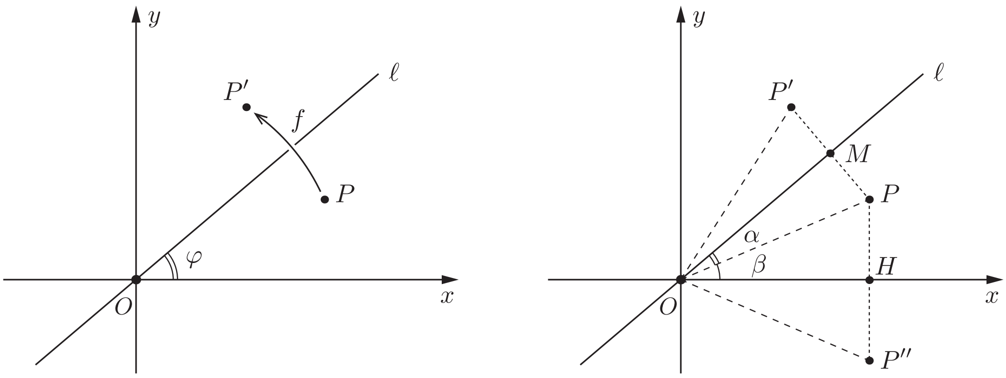

図 3.8　平面内の原点を通る直線 ℓ に関する鏡映

点 P に対し $P' = f(P)$，$P'' = g(P)$ とし，線分 PP' と ℓ との交点を M，線分 PP'' と x 軸との交点を H とおく（図 3.8 右）．鏡映の定義から，$\triangle POM$ と $\triangle P'OM$ は合同なので，$\angle POM = \angle P'OM$ である（これを α とおく）．同様に，$\angle POH = \angle P''OH$ を得る（これを β とおく）．すると $\alpha + \beta = \varphi$ であるから，$\angle P'OP'' = 2\varphi$ が成り立つ．つまり，h_θ を θ-回転変換とすると，

$$f(P) = P' = h_{2\varphi}(P'') = h_{2\varphi}(g(P) = h_{2\varphi} \circ g(P)$$

となる．P の選び方は任意なので，$f = h_{2\varphi} \circ g$ が成り立つことがわかる．$h_{2\varphi}$ も g も線形変換なので，例 3.17 (1) より，f は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

[*7] $f \circ g = g \circ f$ が成り立つとき，「f と g は可換である」という．

によって定まる線形変換である[*8].

定理 3.18. 原点を通る直線 ℓ に関する鏡映は原点を中心とする回転と x 軸に関する鏡映[*9]の合成変換として表すことができる.

アフィン変換

定義 3.19. 正方行列 A とベクトル $\vec{v}$ に対し，平行移動と線形変換の合成変換 $f = f_{\vec{v}} \circ f_A$ を A と $\vec{v}$ によって定まるアフィン変換という（つまり，$f(\vec{p}) = A\vec{p} + \vec{v}$).

定理 3.20. f を行列 A とベクトル $\vec{v}$ によって定まるアフィン変換とする．このとき，3 点 P, Q, R が一直線上の点ならば，f によるそれらの像 P', Q', R' も一直線上にあり，さらにその比は保たれる．つまり，$PQ : QR = P'Q' = Q'R'$ である.

Proof. 3 点 P, Q, R が同一直線上にあるとすると，$\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PR}$ となる k が存在する．つまり，P, Q, R の位置ベクトル $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ は $\vec{q} - \vec{p} = k(\vec{r} - \vec{p})$ を満たす．このとき，$f = f_A \circ f_{\vec{v}}$ より

$$\overrightarrow{P'Q'} = f(\vec{q}) - f(\vec{p}) = (A\vec{q} + \vec{v}) - (A\vec{p} + \vec{v}) = A\vec{q} - A\vec{p} = A(\vec{q} - \vec{p}) = k\,A(\vec{r} - \vec{p}).$$

同様に，

$$\overrightarrow{P'R'} = f(\vec{r}) - f(\vec{p}) = (A\vec{r} + \vec{v}) - (A\vec{p} + \vec{v}) = A\vec{r} - A\vec{p} = A(\vec{r} - \vec{p}).$$

以上のことから，$\overrightarrow{P'Q'} = k\overrightarrow{P'R'}$ を得る．これは P', Q', R' も一直線上にあり，距離の比が $PQ : QR = P'Q' = Q'R'$ を満たすことを意味する. □

定義 3.21. 直交行列 A とベクトル $\vec{v}$ によって決まるアフィン変換 $f = f_{\vec{v}} \circ f_A$ を合同変換という.

注意 3.22. 直交変換も平行移動も 2 点間の距離を保つ[*10]ので，その合成である合同変換も 2 点間の距離を保つ変換であり，任意の 2 点間の距離を保つ変換は合同変換に限る.

3.3.2 逆変換

定義 3.23. 変換 f に対し，$f \circ g = g \circ f = I$ を満たす変換 g を f の逆変換とよび，$g = f^{-1}$ と表す.

定理 3.17 より，$f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$，$f_{\vec{v}}^{-1} = f_{-\vec{v}}$ である．線形変換の例から，どんな変換についても，その逆変換が存在するとは限らない[*11].

[*8] (3.11) 式の θ は 2φ に他ならない.
[*9] この変換は，拡大・縮小変換を与える線形変換の特別な場合であることに注意せよ.
[*10] 定理 3.9 (2) および定理 3.14(2) を参照.
[*11] 厳密の述べると，f が全単射の場合に限り，逆変換が存在する.

3.4　線形変換の固有値と固有ベクトル

定義 **3.24.** 線形変換 f_M に対し，

$$f_M(\vec{v}) = \lambda\,\vec{v} \tag{3.12}$$

を満たすスカラー λ を f_M の固有値とよび，ベクトル $\vec{v}$（ただし，$\vec{v} \neq \vec{0}$）を固有値 λ に関する f_M の固有ベクトルとよぶ．

例 **3.25.** 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 3 に関する固有ベクトルであり，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は f_M の固有ベクトルではない．

固有値・固有ベクトルの性質と求め方

次に，定義式 (3.12) から固有値・固有ベクトルの性質を導く．λ が f_M の固有値で，零ベクトルでないベクトル $\vec{v}$ が λ に関する f_M の固有ベクトルであるとは，

$$M\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \tag{3.13}$$

を満たすことに他ならない．この式は次のように式変形することができる;

$$\begin{aligned} M\vec{v} = \lambda\,\vec{v} &\iff \lambda\,\vec{v} - M\vec{v} = \vec{0} \\ &\iff (\lambda\,I_n - M)\vec{v} = \vec{0}. \end{aligned}$$

この式が意味することは，「$\vec{v}$ は連立 1 次方程式 $(\lambda\,I_n - M)\vec{x} = \vec{0}$ の非自明解[*12]である」とうことである．一方，

$$\begin{aligned} (\lambda\,I_n - M)\vec{x} = \vec{0}\ \text{は非自明解をもつ} &\iff \text{行列}\ (\lambda\,I_n - M)\ \text{は正則ではない} \\ &\iff \det(\lambda\,I_n - M) = 0 \end{aligned}$$

であるから，「f_M の固有値 λ は $\det(\lambda\,I_n - M) = 0$ を満たす数である」ことがわかる．

以上のことから，次の事実が成り立つ．

[*12] 斉次連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ は $\vec{x} = \vec{0}$ を解として持つ．これを自明解という．自明解でない解（つまり $\vec{0}$ 以外の解）を非自明解という．

定理 3.26. 正方行列 M によって定まる線形変換 f_M について，以下のことが成り立つ．

(1) λ が f_M の固有値であるための必要十分条件は $\det(\lambda I_n - M) = 0$ が成り立つことである．

(2) 固有値 λ に関する f_M の固有ベクトルは，斉次連立方程式 $(\lambda I_n - M)\vec{x} = \vec{0}$ の非自明解である．

(1) は「固有値とは t に関する方程式 $\det(t I_n - M) = 0$ の解である」ことを述べてる．一般に，n 次正方行列 M に対し，$\det(t I_n - M)$ は t に関する n 次多項式である．これを M の固有多項式という．

線形変換の固有値・固有ベクトルは以下の手順で求めることができる．

線形変換 $\boldsymbol{f_M}$ の固有値，固有ベクトルの求め方

(1) 行列 M の固有多項式 $\det(tI_n - M)$ を求める．

(2) 方程式 $\det(tI_n - M) = 0$ の解 $t = \lambda$ を求める（この解が f_M の固有値である）．

(3) (2) で求めた各 λ に対し，斉次連立方程式 $(\lambda I_n - M)\vec{x} = \vec{0}$ の非自明解 $\vec{x} = \vec{v}$ を求める（この解 $\vec{v}$ が固有値 λ に関する f_M の固有ベクトルである）．

例 3.27. 行列 $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ によって定まる $\mathbb{R}^2$ の線形変換 f_M の固有値，固有ベクトルを求めなさい．

解． M の固有多項式を求める;

$$\begin{aligned} \det(tI_2 - M) =& \det\begin{pmatrix} t-4 & 1 \\ -2 & t-1 \end{pmatrix} \\ =&(t-4)(t-1) - 1 \times (-2) \\ =&\underline{t^2 - 5t + 6} = (t-2)(t-3). \end{aligned}$$

よって，$\det(tI_2 - M) = 0$ の解は $\underline{2 \text{ と } 3}$ であり，これが f_M の固有値である．

$\lambda = 2$ のとき;

$$(2I_2 - M) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって，$\underline{\vec{u}_{(2)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ は固有値 2 に関する f_M の固有ベクトルである（ただし，$c_1 \neq 0$ は任意の実数）．

$\lambda = 3$ のとき;

$$(3I_2 - M) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって，$\underline{\vec{u}_{(3)} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ は固有値 3 に関する f_M の固有ベクトルである（ただし，$c_2 \neq 0$ は任意の実数）．

例 3.27 の結果から，線形変換 f_M は，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 方向には 2 倍の拡大変換として作用し，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向には 3 倍の拡大変換として作用することがわかる．

行列の対角化

2 次正方行列 M が異なる固有値 λ_1, λ_2 を持つとする．λ_i に関する固有ベクトルを $\vec{v}_i$ $(i = 1, 2)$ とし，このベクトルを列ベクトルとする行列を P とする．つまり，$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix}$．このとき，$M\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ より，

$$\begin{aligned} MP =& M \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\vec{v}_1 & M\vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となる．

n 次正方行列 M に対し，$P^{-1}MP$ が対角行列となる正則行列 P が存在するとき，M は対角化可能であるという．上の議論から，P は M の固有ベクトルを列ベクトルとする行列であり，対角行列 $P^{-1}MP$ の対角成分は M の固有値であることがわかる．特に，M が対称行列のときは，直交行列 P によって対角化することができる．

例 **3.28.** 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列によって対角しなさい．

解**.** M の固有値は 3 と -1，固有ベクトルはそれぞれ $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$（ただし，$c_1, c_2$ は任意の実数）である．$P^{-1}MP$ が対角行列となるような P は，M の固有ベクトルを列ベクトルとする行列であるが，$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は任意の c_1, c_2 に対して直交しているので，ノルムが 1 となるように c_1, c_2 を定めれば，それを並べてできる行列は直交行列となる．例えば，$c_1 = c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とし，$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおくと，P は直交行列で，さらに $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．

定理 **3.29.** 任意の対称行列 A に対し，${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在する．

例 3.28 の結果から，$M = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ となる．P は角度 $\dfrac{\pi}{4}$ の回転変換を与える行列で，その逆行列 P^{-1} も回転変換を与える．また，対角行列は拡大・縮小変換を与えることから，対称行列 M が定義する線形変換は，回転変換と拡大・縮小変換の合成として表せることがわかる．

一般に 2 次正方行列が定義する線形変換は，拡大・縮小変換，せん断，回転，鏡映[*13]の有限個の合成として表すことができる（ただし，表し方は一意的ではない）．

例 3.30. 例 3.27 の行列 M を拡大・縮小変換，せん断，回転（または鏡映）を与える行列の有限個の積として表しなさい．

解. 例 3.27 の結果から，線形変換 f_M の固有値は 2 と 3，固有ベクトルはそれぞれ $\vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．したがって，$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，すなわち $M = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$ となるが，c_1, c_2 をどのような値にしようと，P は直交行列にはなり得ない．そこで，$P \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が直交行列になるような c_1, c_2, a が存在するか考察する．

ここで，

$$P \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & a\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{pmatrix}$$

であるから，これが直交行列となるための条件は

$$\|\vec{v}_1\| = 1, \qquad \langle \vec{v}_1, a\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rangle = 0, \qquad \|a\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| = 1$$

である．この方程式を解くと，$\vec{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\vec{v}_2 = \sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$a = -3$ となることがわかる．以上のことから，$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \sqrt{5} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$，とすると，$M = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$ となり，かつ $P \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ は直交行列となる．したがって，

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

を得る．これは，M によって定まる線形変換は 5 つの鏡映，せん断，拡大・縮小変換の合成として表せることを意味する．

[*13] 鏡映変換を与える行列の列（または行）を入れ替えた行列は回転変換を与える．したがって，任意の 2 次正方行列は拡大・縮小変換，せん断，回転を与える行列の有限個の積として表すことができる．