第 2 章

図形の方程式

2.1　直線

2.1.1　直線のパラメーター表示

ここでは直交座標系を定めた座標平面または座標空間を考える．

2 点 A, B を通る直線を ℓ とする．ℓ 上の点 P はどのように表わせるだろうか．この場合，図 2.1 左のように $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AP}$ は平行である．これは

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} \tag{2.1}$$

を満たす実数 t が存在することを意味する．点 A, B, P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ とすると，$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ であるから，(2.1) は

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \tag{2.2}$$

と表すことができる．これを直線 ℓ のパラメーター表示（または媒介変数表示）といい，t をパラメーター（または媒介変数）という．(2.2) において，パラメーターが t であることを明示する場合は，$\vec{p}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$ と表記する．$\vec{p}(t)$ を位置ベクトルとする点を P_t とすると，t が変化することによって P_t は ℓ 上を動く．t の範囲が実数全体のときは直線 ℓ 全体を表し，$0 \leq t \leq 1$ のときは線分 AB を表す．

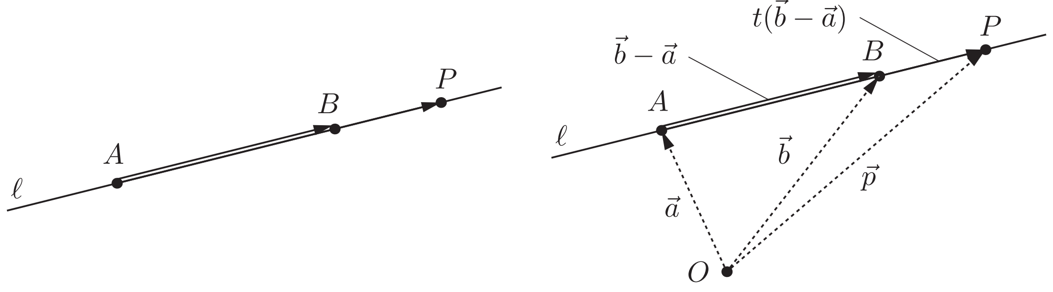

図 2.1　2 点 A, B を通る直線上の点

(2.2) において，$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ とおいた式 $\vec{p}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$ は点 A を通り，$\vec{v}$ に平行な直線を表す（図 2.2）．このベクトル $\vec{v}$ を直線 ℓ の方向ベクトルという．

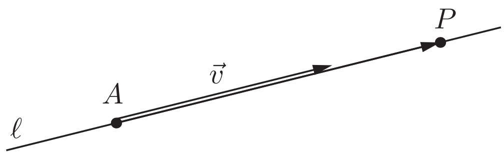

図 2.2　直線の方向ベクトル

直線のパラメーター表示

(1) 2 点 A, B を通る直線上の点 P は

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$$

(2) 点 A を通り，$\vec{v}$ に平行な（方向ベクトルが $\vec{v}$ の）直線上の点 P は

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{v}$$

と表すことができる．

例 **2.1.** 平面上の 2 点 $(1, 2)$, $(-3, 5)$ を通る直線を ℓ とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) ℓ のパラメーター表示を求めなさい．
(2) 点 $Q(5, -1)$ が ℓ 上の点であるか否か判定しなさい．

解. (1) ℓ の方向ベクトルの成分は $(1, 2) - (-3, 5) = (4, -3)$ である．点 $(1, 2)$ を通るので，ℓ 上の点はパラメーター t を用いて $(1, 2) + t(4, -3) = \underline{(4t + 1, -3t + 2)}$ と表すことができる．

(2) Q が ℓ 上の点ならば，$(4t + 1, -3t + 2) = (5, -1)$ を満たす実数 t が存在する．つまり，2 式 $4t + 1 = 5$, $-3t + 2 = -1$ を同時に満たす t が存在する．1 つ目の式から $t = 1$ を得るが，これは 2 つ目の式 $-3t + 2 = -1$ も満たす．したがって，$\underline{Q \text{ は } \ell \text{ 上の点}}$である．

注意 **2.2.** 直線のパラメーター表示は一意的に定まるものではない（表し方は無数にある）．

2.1.2　平面内の直線の方程式

パラメーター表示 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{v}$ で与えられる平面内の直線上の点を $P(x, y)$ とするとき，x, y がどのような方程式を満たすのか考える．

$A(a_1, a_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ とすると，

$$\vec{p} = (x, y) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2) = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2)$$

つまり，

$$x = a_1 + tv_1, \quad y = a_2 + tv_2$$

となる．この 2 式からパラメーター t を消去すると

$$v_2 x - v_1 y = a_1 v_2 - a_2 v_1$$

となる．つまり，平面内の直線上の点 $P(x, y)$ は x, y に関する 1 次方程式として表される．

平面内の直線の方程式

平面内の直線上の点 $P(x, y)$ は

$$\alpha x + \beta y = \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は定数})$$

を満たす．

例 **2.3.** 平面上の 2 点 $(1, 2)$, $(-3, 5)$ を通る直線を ℓ とする．ℓ 上の点を (x, y) とするとき，x と y が満たす方程式を求めなさい．

解．例題 2.1 より，ℓ 上の点は $(x, y) = (4t+1, -3t+2)$ と表すことができる．$x = 4t+1$, $y = -3t+2$ から t を消去すると $\underline{3x + 4y = 11}$ を得る．

2.1.3　空間内の直線の方程式

平面内の直線の方程式が 1 次方程式 $\alpha x + \beta y = \gamma$ と表せることから，空間内の直線も同様に 1 次方程式 $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ と表せると思うかもしれないが，この考えは間違いである．

点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ である直線上の点はパラメーター t を用いて $(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, a_3 + tv_3)$ と表すことができる．$(x, y, z) = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, a_3 + tv_3)$ とおいて，3 式 $x = a_1 + tv_1$, $y = a_2 + tv_2$, $z = a_3 + tv_3$ をそれぞれ形式的に $t = \cdots$ と式変形すると

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{x - a_2}{v_2} = \frac{x - a_3}{v_3} \ (= t) \tag{2.3}$$

となる．これが空間内の直線の方程式である．この式の意味は次々節で述べる．

2.2　空間内の平面

2.2.1　平面のパラメーター表示

異なる 2 つ点に対し，それらを通る直線がただ一つ定まるように，空間内の 3 点（ただし，1 直線上にはないとする）を決めると，それらを通る平面がただ一つ定まる（図 2.3 左）．

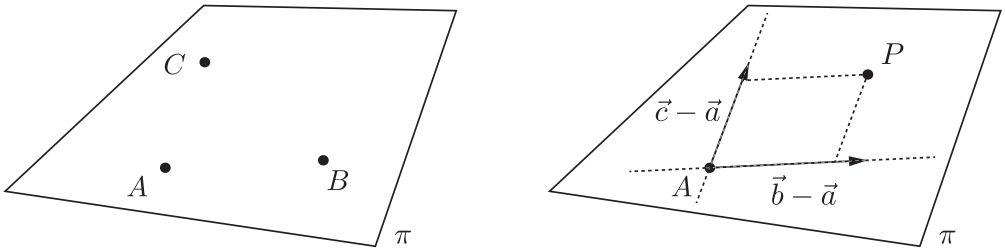

図 2.3　3 点 A, B, C を通る平面

空間内の 3 点 A, B, C を通る平面を π とおく．この平面上の点 P を A, B, C の座標を用いて表すことを考える．A を平面 π の原点，B, C を単位点と思うと，π に（斜行）座標系が定まり，π 上の任意の点 P に対して座標 (t, s) が定まる（図 2.3 右）．つまり，$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 (t, s) が定まる．点 A, B, C, P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ とすると，

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a}) \tag{2.4}$$

となる．これを平面 π のパラメーター表示（または媒介変数表示）といい，t, s をパラメーター（または媒介変数）という．(2.4) において，パラメーターが t, s であることを明示する場合は，$\vec{p}(t, s) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$ と表記する．$\vec{p}(t, s)$ を位置ベクトルとする点を $P_{(t,s)}$ とすると，t, s が変化することによって $P_{(t,s)}$ は π 全体を動く．$0 \leq t, s \leq 1$ の範囲を動くとき，線分 AB, AC を 2 辺とする平行四辺形を表す．また，$t, s > 0$ かつ $0 \leq t + s \leq 1$ の範囲を動くとき，三角形 ABC を表す．

(2.4) において，$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{u} = \vec{c} - \vec{a}$ は平面 π の基底となる．$\vec{p}(t, s) = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{u}$ で与えられる式は，点 A を通り，$\{\vec{v}, \vec{u}\}$ を基底とする平面を表す（図 2.2）．

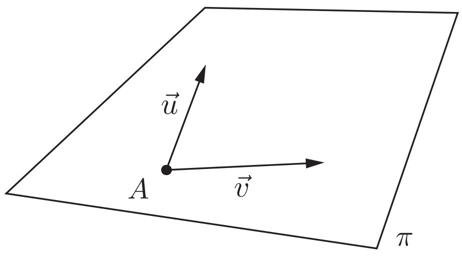

図 2.4　平面の基底

空間内の平面のパラメーター表示

(1) 3 点 A, B, C を通る平面上の点 P は

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$$

(2) 点 A を通り，$\{\vec{v}, \vec{u}\}$ を基底とする平面上の点 P は

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{u}$$

と表すことができる．

2.2.2　平面の方程式

前小節では，点 A を通り，$\vec{v}, \vec{u}$ を基底とする平面 π 上の点を P とすると，$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} + s\vec{u}$ と書けることを述べた．これは，$\vec{v}$ と $\vec{u}$ の外積 $\vec{v} \times \vec{u}$ が $\overrightarrow{AP}$ と直交することと同値である．つまり，$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u}$ とおくとき，P が平面 π 上の点あるための必要十分条件は，P の位置ベクトル $\vec{p}$ が

$$\langle \vec{p} - \vec{a}, \vec{n} \rangle = 0 \tag{2.5}$$

を満たすことである．このように平面と直交するベクトル $\vec{n}$ を平面の法線ベクトルという．

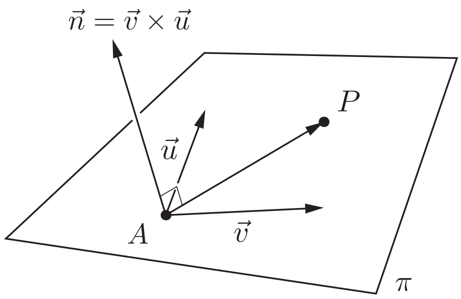

図 2.5　平面の法線ベクトル

では，(2.5) をベクトルの成分を用いて表してみよう．$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$，$\vec{p} = (x, y, z)$ とすると，

$$\begin{aligned} 0 =& \langle \vec{p} - \vec{a}, \vec{n} \rangle \\ =& \alpha(x - a_1) + \beta(y - a_2) + \gamma(z - a_3) = 0 \\ =& \alpha x + \beta y + \gamma z - (\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3) \end{aligned}$$

となる．$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$ も定数だから，$\delta = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$ とおくと，

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \tag{2.6}$$

となる．これが平面の方程式である．x, y, z の係数が法線ベクトルの成分となっていることに注意せよ．

空間内の平面の方程式

(1) 点 A を通り，法線ベクトルが $\vec{n}$ の平面上の点 P は

$$\langle \vec{p}-\vec{a}, \vec{n} \rangle = 0$$

を満たす.

(2) x, y, z に関する 1 次方程式

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

を満たす点 (x, y, z) は空間内の平面上の点である（法線ベクトルは (α, β, γ) と平行である）.

例 **2.4.** 3 点 $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(4, -4, -1)$ を通る平面を π とする．このとき，次の問に答えなさい.

(1) π のパラメーター表示を求めなさい.
(2) π 上の点を (x, y, z) とするとき，x, y, z が満たす方程式を求めなさい.

解. (1) π の基底は

$$\begin{aligned}\vec{v} =&(2,1,2)-(1,2,3)=(1,-1,-1),\\ \vec{u} =&(4,-4,-1)-(1,2,3)=(3,-6,-4)\end{aligned}$$

である．したがって，π のパラメーター表示は

$$\begin{aligned}\vec{p}(t,s) =&(1,2,3)+t(1,-1,-1)+s(3,-6,-4)\\ =&\underline{(1+t+3s,\ 2-t-6s,\ 3-t-4s)}\end{aligned} \tag{2.7}$$

となる.

(2) π の法線ベクトルは $\vec{n}=\vec{v}\times\vec{u}=(-2,1,-3)$ である．$\vec{p}=(x,y,z)$, $\vec{a}=(1,2,3)$ とおくと，π の方程式は

$$\begin{aligned}0 =&\langle \vec{p}-\vec{a}, \vec{n} \rangle\\ =&-2(x-1)+(y-2)+(-3)(z-3)\\ =&-2x+y-3z+9,\end{aligned}$$

すなわち，$\underline{2x-y+3z=9}$ である.

例 **2.5.** 原点を通る平面 $2x-y+3z=0$ を π' とする．点 $(1, 2, 3)$ を通り，π と平行な（つまり，法線ベクトルが同じ）平面 π の方程式を求めなさい.

解. 平面 π の法線ベクトルの成分は $2x-y+3z=0$ の係数なので，$\vec{n}=(2,-1,3)$ である．求める平面は $(1,2,3)$ を通るので，平面のベクトル方程式 2.5 より，$2(x-1)-(y-2)+3(z-3)=0$，すなわち $\underline{2x-y+3z=9}$ である.

平面の方程式 (2.5) は，直線の方程式を導いた方法（例題 2.3 を参照）と同様，パラメーター表示の式からパラメーターを消去することによって導出することもできる．

例題 **2.4(2)** の別解. (2.7) の右辺を (x, y, z) とおく．つまり，

$$x = 1 + t + 3s, \quad y = 2 - t - 6s, \quad z = 3 - t - 4s.$$

上の第 1 式と第 2 式を（x, y, z を定数と見なして）t, s に関する連立 1 次方程式と思って解くと，$t = 2x + y - 4$, $s = \frac{1}{3}(3 - x - y)$ となる．これを第 3 式に代入することにより，$\underline{2x - y + 3z = 9}$ を得る．

2.3　図形の交わり

平面と平面の交わり

空間内の 2 つの異なる平面を考える．図 2.6 左のように，平行（つまり，法線ベクトルが平行）ならば 2 つの平面が交わることはないが，一般的には図 2.6 右のように交わりを持ち，交点の集まりは直線となる（これを交線とよぶ）．

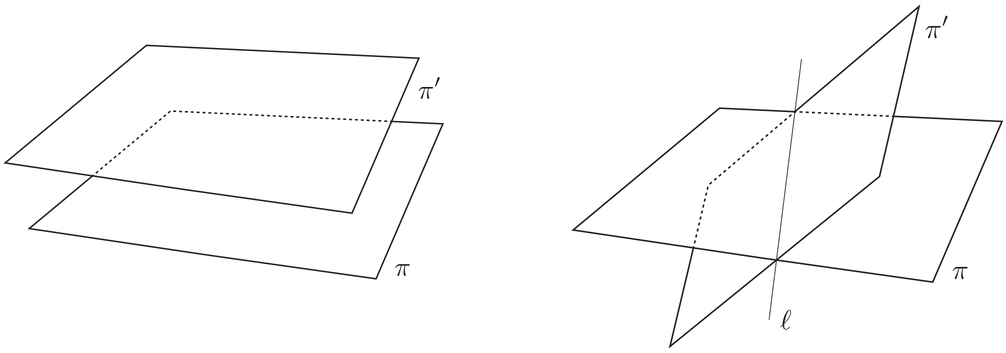

図 2.6　空間内の 2 つの平面

与えられた 2 つの平面 $\pi_i \ : \ \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z = \delta_i \ (i = 1, 2)$ に対し，交線のパラメーター表示は求めたい．交線上の点 (x, y, z) は，π_1, π_2 両方の方程式を同時に満たす．つまり，連立 1 次方程式の解が交線を表す．

例 **2.6.** 2 の平面 $2x - y + 5z = -10$ と $3x + 2y + 4z = -1$ の交線のパラメーター表示を求めなさい．

解. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = -10 \\ 3x + 2y + 4z = -1 \end{cases}$$

の解を求める．拡大係数行列を行基変形によって簡約階段行列に変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & -10 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

となる．したがって，解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．これは点 $(-3, 4, 0)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (-2, 1, 1)$ の直線である．

平面と直線の交点

空間内の直線と平面の位置関係については，(i) 1 点で交わる場合（図 2.7 左），(ii) 直線と平面が平行で交わらない場合，(iii) 平面に直線が完全に含まれる場合（図 2.7 右）の 3 つの場合が考えられる．

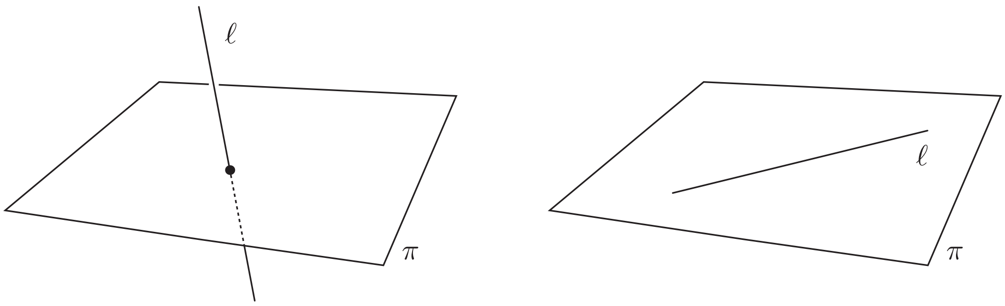

図 2.7　空間内の平面と直線

平面 π の方程式を $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ とし，ℓ を点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ の直線とする．つまり，ℓ はパラメーター表示 $\vec{p}(t) = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, a_3 + tv_3)$ で表される直線である．

$\vec{p}(t_0) = (a_1 + t_0 v_1, a_2 + t_0 v_2, a_3 + t_0 v_3)$ が π 上の点であると仮定する．このとき，

$$(\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 - \delta) + t_0(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) = 0 \tag{2.8}$$

が成り立つ．もし，$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \neq 0$ ならば，(2.8) より

$$t_0 = -\frac{\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 - \delta}{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3}$$

となる．

一方，$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$[*1]のとき，(2.8) が成り立つためには $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 - \delta = 0$ でなくてはならない．この場合は，任意の t_0 に対して (2.8) が成り立つ．つまり，ℓ は π 内の直線である．

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ かつ $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 - \delta \neq 0$ ならば，(2.8) を満たす t_0 は存在しない．つまり，ℓ と π との交点は存在しない．

例 **2.7.** π を方程式 $3x - 5y + z = -2$ で表される空間内の平面とする．このとき，次の問に答えなさい．

[*1] これは ℓ の方向ベクトルと，π の法線ベクトルが直交することを意味する．

(1) 直線 l : $\vec{p}(t) = (2t-1, t+3, -2t+3)$ と π との交点を求めなさい．

(2) 直線 m : $\vec{q}(t) = (2t-1, t+3, kt+3)$ と π は交点を持たないとする．このとき，k の値を求めなさい．

解． (1) $\vec{p}(t)$ を π の式に代入すると

$$\begin{aligned} 0 =& 3(2t-1) - 5(t+3) + (-2t+3) - (-2) \\ =& -t - 13, \end{aligned}$$

したがって，$t = -13$ となる．つまり，$\vec{p}(-13) = \underline{(-27, -20, 29)}$ が ℓ と π の交点である．

(2) $\vec{q}(t)$ を π の式に代入すると

$$\begin{aligned} 0 =& 3(2t-1) - 5(t+3) + (kt+3) - (-2) \\ =& (1+k)t - 13, \end{aligned} \tag{2.9}$$

となる．t の係数 $(1+k)$ が 0 でなければ，(1) の手順で交点が求まる．求める条件は，交点を持たない場合なので $1+k=0$，つまり，$k=-1$ である．実際，$k=-1$ ならば，(2.9) より $-13=0$ となり，これは矛盾する．

2.4　2 次曲線と 2 次曲面

第 1 節と第 2 節では，1 次方程式を満たす点のなす図形について述べた．ここでは 2 次方程式によって表される図形について簡単に紹介する．

2.4.1　2 次曲線

2 次方程式

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

（ただし，a_{ij}, b_k, c は定数）を満たす平面内の点 (x, y) 全体からなる図形を **2** 次曲線という．

例 2.8. 点 C と正の数 r に対し，$\|\overrightarrow{CP}\| = r$ を満たす点 P の集まりを，C を中心とし，半径が r の円という．特に，平面における円を円周，空間における円を球面という．このとき，円周が 2 次曲線であることを示しなさい．

解． $C(c_1, c_2)$，$P(x, y)$ とおくと，$\overrightarrow{CP} = (x-c_1, y-c_2)$ となる．$\|\overrightarrow{CP}\|^2 = r^2$ を計算すると，

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = r^2$$

となる．したがって，円は 2 次曲線である．

2 次曲線

$$6x^2 - xy - 2y^2 - 5x - 6y - 4 = 0 \tag{2.10}$$

は

$$(3x-2y-4)(2x+y+1)=0$$

と因数分解できる．したがって，点 $P(x,y)$ が 2 次曲線 (2.10) 上の点であることと，P が 2 つの直線 $3x-2y-4=0$, $2x+y+1=0$ のいずれかの点であることは同値である．このように 1 次方程式の積に因数分解できる 2 次曲線を可約 **2** 次曲線といい，可約でない 2 次曲線を既約 **2** 次曲線という．

既約な 2 次曲線は本質的には次の 3 つ[*2]しかない．

楕円

方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a,b>0) \tag{2.11}$$

で与えられる 2 次曲線を楕円という（図 2.8 左）．

双曲線

方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a,b>0) \tag{2.12}$$

で与えられる 2 次曲線を双曲線という（図 2.8 右）．

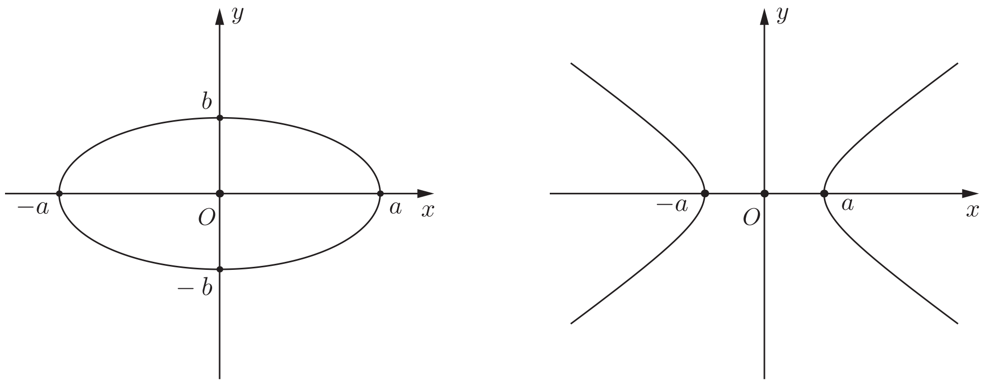

図 2.8　楕円と双曲線

放物線

方程式

$$y^2=4px \qquad (p>0) \tag{2.13}$$

で与えられる 2 次曲線を放物線という（図 2.9）．

[*2] 例えば，$x^2+y^2=0$ も $x^2+y^2=-1$ も 2 次曲線だが，前者を満たすのは原点 $(x,y)=(0,0)$ のみだし，後者を満たす実数の組 (x,y) は存在しない．このような奇妙な場合を除外して，既約な 2 次曲線は 3 種類しかない．

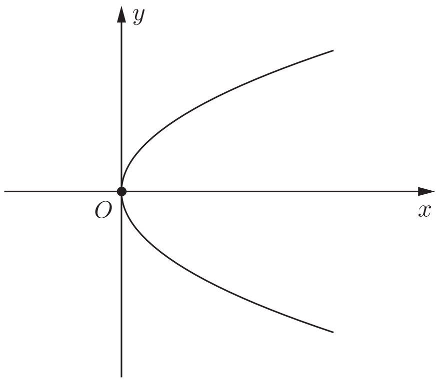

図 2.9　放物線

2.4.2　2 次曲面

2 次方程式

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

（ただし，a_{ij}, b_k, c は定数）を満たす空間内の点 (x, y, z) からなる図形を **2** 次曲面という．1 次多項式の積に因数分解できる 2 次曲面を可約 **2** 次曲面といい，可約でない 2 次曲面を既約 **2** 次曲面という．

（つづく...）