情報数学 III 期末試験 解答

$\boxed{1}$

(1) 原点を中心とする回転角 $\dfrac{\pi}{6}$ の回転変換は行列 $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ によって定義される線形変換である．したがって，点 $P(1,-3)$ の像は $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}$.

(2) 仮定から，$f_A \circ f_B\,(=f_{AB})$ は恒等変換である．f_{AB} が恒等変換となるのは，$AB = I_2$ のときであるから，求める行列 B は A の逆行列である．$A^{-1} = \dfrac{1}{-4-(-3)}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$.

(3) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を並べて行列 $N = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ をつくる．この行列に左から M をかけると，

$$MN = M\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\vec{a} & M\vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} & -2\vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

となる．$N^{-1} = \dfrac{1}{3-(-2)}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ より，

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} N^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 18 & -4 \end{pmatrix}}.$$

$\boxed{2}$

(1) 「線形変換 f の固有値が λ である」とは，$f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ を満たす零ベクトルでないベクトル $\vec{v}$ が存在することである（または，$f = f_M$ のとき，$\det(\lambda I_n - M) = 0$ となること）.

(2) 「線形変換 f の固有ベクトルが $\vec{v}$ である」とは，$f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ を満たす実数 λ が存在することである.

(3) 固有多項式は

$$\det(tI_2 - M) = \det\begin{pmatrix} t+1 & -3 \\ -18 & t+4 \end{pmatrix} = t^2 + 5t - 50 = (t+10)(t-5)$$

であるから，$\underline{\text{固有値は } 5,\ -10}$ である．

固有値 5 の場合，$5I_2 - M = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，固有ベクトルは $\underline{c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ である．

固有値 -10 の場合，$-10I_2 - M = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -18 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，固有ベクトルは $\underline{c\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$ である．ただし，c は 0 でない任意の実数である．

$\boxed{3}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(1) $y = 2x^2 + 4x - 1 = 2(x+1)^2 - 3$ であるから，$x + 1 = X,\ y + 3 = Y$ と座標変換すればよい．つまり，この場合は $\underline{M = I_2,\ a = -1,\ b = -3}$.

(2) 上の座標変換の式中の M は基底の変換行列である．

$$\begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 & a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

より，$\underline{M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}}$.

(3) (1) の結果から $y = 2(x+1)^2 - 3$ であるから，$x + 1 = Y,\ y + 3 = X$ と変換すればよい．これは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ である．したがって，$\underline{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ a = -1,\ b = -3}$.

$\boxed{4}$

(1) 0 でない実数 k に対し，$O(0:0:0:k)$ である．たとえば，$(0:0:0:3)$ など．

(2) 透視投影の定義にしたがって求めてもよいし，公式に代入して求めてもよい．ただ，視点 $(10, 2, 3)$ と，移したい点 $P(-8, 2, 3)$ を通る直線は yz-平面（$x = 0$）に直交する．よって，その直線と投影面の交点（投影像）の座標が $\underline{(0, 2, 3)}$ であることが直ちにわかる．

(3) この問題はすでに授業中の課題として出しているので，ここでの解説は省略する（講義ノート p.73 を参照せよ．）．