一般の n のときは，ベクトルを成分とする形式的な行列（ベクトル）を考え，この積をベクトルの内積を用いて定義する．例えば，

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{b}_1 \\ \vec{c}_1 & \vec{d}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{a}_2 & \vec{b}_2 \\ \vec{c}_2 & \vec{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2\rangle + \langle \vec{b}_1, \vec{c}_2\rangle & \langle \vec{a}_1, \vec{b}_2\rangle + \langle \vec{b}_1, \vec{d}_2\rangle \\ \langle \vec{c}_1, \vec{a}_2\rangle + \langle \vec{d}_1, \vec{c}_2\rangle & \langle \vec{c}_1, \vec{b}_2\rangle + \langle \vec{d}_1, \vec{d}_2\rangle \end{pmatrix}$$

と定める．右辺の行列は数を成分とする通常の行列であることに注意せよ．このとき，

$$\begin{pmatrix} \vec{e'}_1 \\ \vec{e'}_2 \\ \vdots \\ \vec{e'}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 & \cdots & \vec{e'}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_1\rangle & \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\rangle & \cdots & \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_n\rangle \\ \langle \vec{e'}_2, \vec{e'}_1\rangle & \langle \vec{e'}_2, \vec{e'}_2\rangle & \cdots & \langle \vec{e'}_2, \vec{e'}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{e'}_n, \vec{e'}_1\rangle & \langle \vec{e'}_n, \vec{e'}_2\rangle & \cdots & \langle \vec{e'}_n, \vec{e'}_n\rangle \end{pmatrix} = I_n$$

であるから，(4.3) より

$$\begin{aligned} I_n &= \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 \\ \vec{e'}_2 \\ \vdots \\ \vec{e'}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 & \cdots & \vec{e'}_n \end{pmatrix} = {}^tM\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{pmatrix} M \\ &= {}^tMI_nM \\ &= {}^tMM \end{aligned}$$

となり，M が直交行列であることがわかる．　□

問題 4.3. $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ を平面の直交座標系とする．次の問に答えなさい．

(1) 基底のベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたベクトルをそれぞれ $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ とする（図 4.4 参照）．$\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ を $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ の線形結合で表しなさい．

(2) $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$-座標系において方程式 $x^2 - y^2 = 1$ を満たす点 (x, y) の集まりを $\mathcal{C}$ とする．$\mathcal{C}$ を $\{O, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$-座標系の方程式で表しなさい．

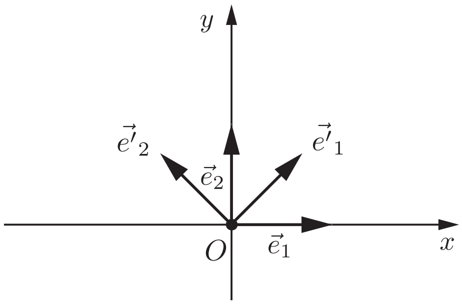

図 4.4　基底を変換した座標系

解.　(1) $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 座標系の単位点をそれぞれ E_1, E_2 とする．すると，$E_1(1,0), E_2(0,1)$ である．$\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ に対し，点 E'_1, E'_2 を $\vec{e'}_1 = \overrightarrow{OE'_1}, \vec{e'}_2 = \overrightarrow{OE'_2}$ となるように定める

と，回転変換の定義より，E_1', E_2' の $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 座標系における座標はそれぞれ

$$R_{\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$
$$R_{\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

となる．したがって，

$$\vec{e'}_1 = \overrightarrow{OE_1'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_2,$$
$$\vec{e'}_2 = \overrightarrow{OE_2'} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_2$$

を得る．

(2) (1) の結果より，$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 \end{pmatrix} M$$

となるので，$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 座標系の座標 (x, y) と $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 座標系の座標 (X, Y) との関係は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \qquad \text{つまり} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}$$

となる．これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入することにより，$\underline{XY = -\frac{1}{2}}$ を得る．

4.3　一般の座標変換

最後に，直交座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ に対し，原点 O と基底 $\{\vec{e}_i\}$ の両方を変えた座標系 $\{O'; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ を考えよう．この 2 つの座標系における座標の変換公式は，前節と前々節の座標変換の「合成」として得られる．つまり，座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ から $\{O'; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ への変換を，

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{O'; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\} \tag{4.4}$$

という 2 つの座標変換に分けて考える．座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における点 O' の座標を (d_1, d_2) とし，基底 $\{\vec{e}_i\}, \{\vec{e'}_j\}$ が

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 \end{pmatrix} M$$

の関係を満たすとする．(4.4) の 3 つの座標系のおける点 P の座標をそれぞれ (x, y)，(x', y')，(x'', y'') とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

であるから，(x, y) と (x'', y'') は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

と変換される．

例 4.4. ある座標平面（座標系は $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$）において方程式 $y = 2x - 3$ で与えられる直線を ℓ とする．この座標系を別の直交座標系 $\{O'; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ に変換したところ，ℓ の方程式は $Y = 0$ となった．このとき，座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における点 O' の座標と基底の変換行列を求めなさい．

解． 直線 ℓ の方程式は行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 = 0$$

と表すことができる．ここで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

と座標変換すると

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \left(M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right) - 3 = 0$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 2d_1 - d_2 - 3 = 0$$

となる．この方程式が $Y = 0$ となるためには，M と d_1, d_2 が

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & k \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

$$2d_1 - d_2 - 3 = 0 \tag{4.6}$$

を満たせばよい．

(4.6) を満たす d_1, d_2 は無限にある．$d_1 = 1, d_2 = -3$ などがその例である．

$M = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}$ とおくと，M が直交行列であることから，

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1, \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \tag{4.7}$$

が成り立つ．さらに，$\vec{n} = (2, -1)$ とおくと，条件 (4.5) は

$$\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = 0, \quad \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle = k \tag{4.8}$$

と同値であることから，(4.7), (4.8) より，$\vec{n}$ と $\vec{a}$ は直交し，$\vec{n}$ と $\vec{b}$ は平行であることがわかる．そこで，$\vec{b} = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$ とし，$\vec{a}$ を $\vec{n}$ と直交する単位ベクトルとすれば，M は (4.5) を満たす直交行列となる．