であるから，右辺の x' の係数と定数項が消えるように d_1, d_2 を定めればよい．

しかし，ここでは別の解法を用いる．$\mathcal{C}$ の定義式の右辺をの右辺を平方完成すると

$$y = 2x^2 - x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$$

であるから，$x - \dfrac{1}{4} = x'$，$y - \dfrac{7}{8} = y'$ とおけば，$\mathcal{C}$ の方程式は $y' = 2x'^2$ となる．上の式と座標変換の公式と比較することにより，$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における $\underline{O' \text{ の座標が } \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)}$ であることがわかる．

4.2　基底の変換

次に，直交座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ に対し，原点 O は変えずに，基底だけを変えた座標系 $\{O; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ を与え，この 2 つの座標系における座標の変換（関係）について考える．

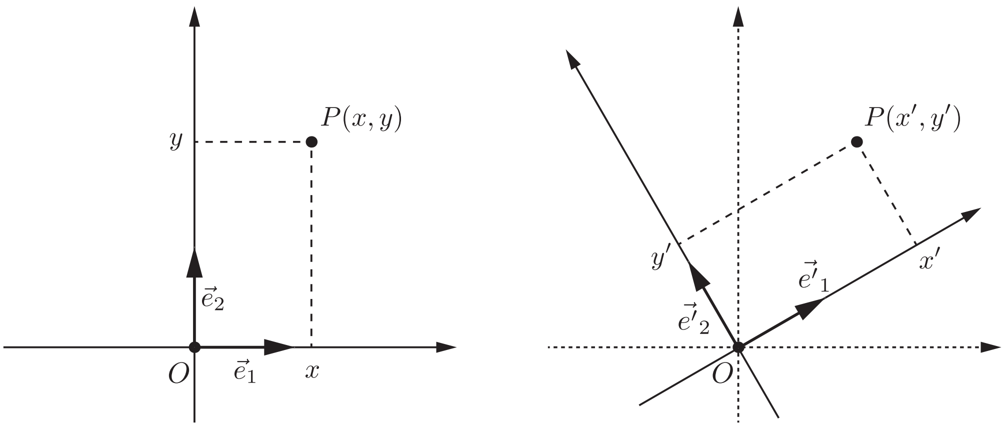

図 4.3　基底を変換した座標系

各座標系における点 P の座標をそれぞれ (x,y)，(x',y') とする．つまり，

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{OP} = x'\vec{e'}_1 + y'\vec{e'}_2.$$

ベクトル $\vec{e'}_i$ $(i = 1, 2)$ も平面ベクトルなので，$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ の線形結合で表すことができる．つまり，

$$\vec{e'}_1 = a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2, \quad \vec{e'}_2 = a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \tag{4.1}$$

となる数 a_1, a_2, b_1, b_2 が存在する．このとき，

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \overrightarrow{OP} &= x'\vec{e'}_1 + y'\vec{e'}_2 \\ &= x'\left(a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2\right) + y'\left(a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2\right) \\ &= \left(a_1x' + a_2y'\right)\vec{e}_1 + \left(b_1x' + b_2y'\right)\vec{e}_2 \end{aligned}$$

となり，$x = a_1x' + a_2y'$，$y = b_1x' + b_2y'$ を得る．これは行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x' + a_2y' \\ b_1x' + b_2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

と表すことができる．

ここで，4.2 式右辺の行列は，基底のベクトルを成分とする形式的な 1×2 行列の関係式

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 & a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

に現れる行列と同じ行列である．これを基底の変換行列という．

座標変換の公式（基底の変換）

座標系 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ において $P(x,y)$，座標系 $\{O;\vec{e'}_1,\vec{e'}_2\}$ において $P(x',y')$ とする．さらに，それぞれの基底 $\{\vec{e}_i\}$ と $\{\vec{e'}_j\}$ は

$$
\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 \end{pmatrix} M
$$

を満たすとする．このとき，

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}
$$

が成り立つ．

命題 4.2. 直交座標系を与える 2 つの基底 $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ と $\{\vec{e'}_j\}_{j=1,\dots,n}$ の間の変換行列は直交行列である．つまり，基底が

$$
\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \vec{e'}_i, \vec{e'}_j \rangle = \delta_{ij}
$$

を満たすとき，

$$
\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 & \cdots & \vec{e'}_n \end{pmatrix} M \tag{4.3}
$$

となる行列 M は直交行列である．

Proof. $n=2$ の場合，$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ とおくと，$\vec{e'}_j$ は $\vec{e}_i$ の線形結合 (4.1) と表される．M が直交行列であることと

$$
a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1b_1 + a_2b_2 = 0
$$

は同値であるから，これが成り立つことを示せばよい．条件式 (4.1) より

$$
\begin{aligned}
1 =& \|\vec{e'}_1\|^2 = \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_1 \rangle = \langle a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2, a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 \rangle \\
=& a_1^2\|\vec{e}_1\|^2 + 2a_1b_1\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle + b_1^2\|\vec{e}_2\|^2 \\
=& a_1^2 + b_1^2
\end{aligned}
$$

を得る．同様に，$\|\vec{e'}_2\|^2 = 1, \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_2 \rangle = 0$ より，$b_1^2 + b_2^2 = 1$，$a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ を得る．

一般の n のときは，ベクトルを成分とする形式的な行列（ベクトル）を考え，この積をベクトルの内積を用いて定義する．例えば，

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{b}_1 \\ \vec{c}_1 & \vec{d}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{a}_2 & \vec{b}_2 \\ \vec{c}_2 & \vec{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\vec{a}_1, \vec{a}_2\rangle + \langle\vec{b}_1, \vec{c}_2\rangle & \langle\vec{a}_1, \vec{b}_2\rangle + \langle\vec{b}_1, \vec{d}_2\rangle \\ \langle\vec{c}_1, \vec{a}_2\rangle + \langle\vec{d}_1, \vec{c}_2\rangle & \langle\vec{c}_1, \vec{b}_2\rangle + \langle\vec{d}_1, \vec{d}_2\rangle \end{pmatrix}$$

と定める．右辺の行列は数を成分とする通常の行列であることに注意せよ．このとき，

$$\begin{pmatrix} \vec{e'}_1 \\ \vec{e'}_2 \\ \vdots \\ \vec{e'}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 & \cdots & \vec{e'}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\vec{e'}_1, \vec{e'}_1\rangle & \langle\vec{e'}_1, \vec{e'}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{e'}_1, \vec{e'}_n\rangle \\ \langle\vec{e'}_2, \vec{e'}_1\rangle & \langle\vec{e'}_2, \vec{e'}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{e'}_2, \vec{e'}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\vec{e'}_n, \vec{e'}_1\rangle & \langle\vec{e'}_n, \vec{e'}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{e'}_n, \vec{e'}_n\rangle \end{pmatrix} = I_n$$

であるから，(4.3) より

$$\begin{aligned} I_n &= \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 \\ \vec{e'}_2 \\ \vdots \\ \vec{e'}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 & \cdots & \vec{e'}_n \end{pmatrix} = {}^tM\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{pmatrix}M \\ &= {}^tMI_nM \\ &= {}^tMM \end{aligned}$$

となり，M が直交行列であることがわかる．　□

4.3　一般の座標変換