第 4 章

座標変換

座標系とは，平面や空間内の点に数の組を対応させる写像のことだった（第 1 章 1.1 参照）．座標系を定めるには，原点 O と基底 $\{\vec{e}_i\}$ が必要であり，このとり方は無限にあるので，座標系の定め方は一意ではない．ある座標系で座標 (x, y) である点 P は，別の座標系では (x', y') であるとするとき，(x, y) と (x', y') はどのような関係式を満たすだろうか．これを座標系の間の関係（原点の座標，基底の変換行列）を用いて表すことがこの章の目的である．

以下では内容をわかりやすくするために，平面 $\mathbb{R}^2$ の直交座標系の変換について述べる（空間の場合もまったく同様である）．つまり，平面上の点 O と正規直交基底[*1] $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2}$ によって定まる座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ の変換について考える．

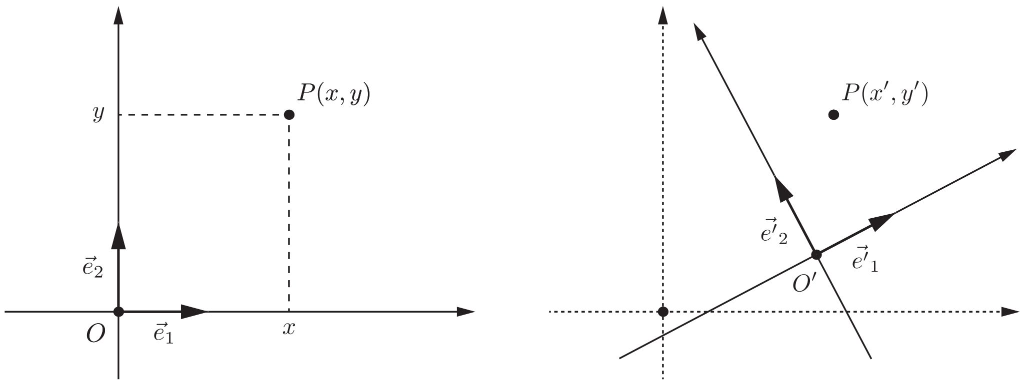

図 4.1　座標系が異なれば，点の座標も異なる

4.1　座標の平行移動

この節では，直交座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ に対し，原点 O を別の点 O' に変えた座標系 $\{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ を与え，この 2 つの座標系における座標の変換（関係）について考える．

[*1] $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$，かつ $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$ を満たす平面ベクトルの組のこと．

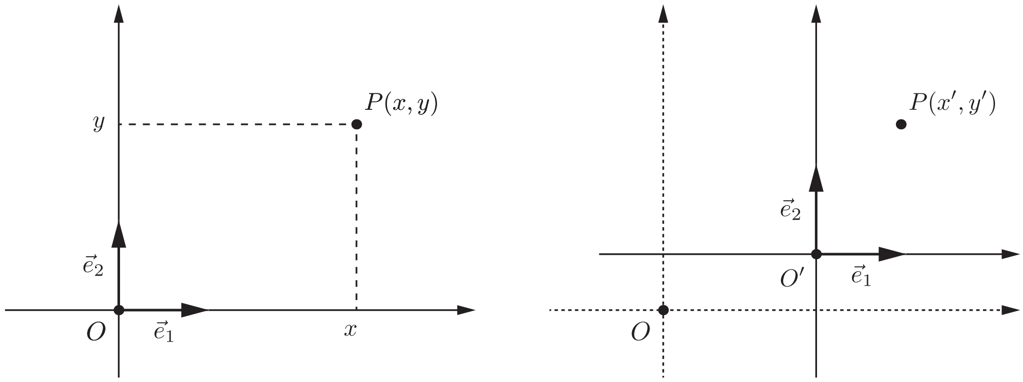

図 4.2　座標系が異なれば，点の座標も異なる

各座標系における点 P の座標をそれぞれ (x,y)，(x',y') とする．つまり，

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{O'P} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2.$$

点 O' の $\{O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における座標を (d_1, d_2) とする．つまり，

$$\overrightarrow{OO'} = d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2.$$

このとき，

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \overrightarrow{OP} =& \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \\ =& (d_1'\vec{e}_1 + d_2'\vec{e}_2) + (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) \\ =& (x' + d_1)\,\vec{e}_1 + (y' + d_2)\,\vec{e}_2. \end{aligned}$$

したがって，$x = x' + d_1$，$y = y' + d_2$ を得る．

座標変換の公式（原点の移動）

座標系 $\{O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ において $P(x,y)$，座標系 $\{O';\ \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ において $P(x',y')$ とする．さらに，$\{O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ において $O'(d_1, d_2)$ であるとする．このとき，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

例 **4.1.** 座標系 $\{O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ において，方程式 $y = 2x^2 - x + 1$ で与えれる放物線を $\mathcal{C}$ とする．座標系 $\{O';\ \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における $\mathcal{C}$ の方程式が $y' = ax'^2$ であるとき，定数 a と点 O' の座標系 $\{O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における座標を求めなさい．

解**.** 座標系 $\{O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における点 O' の座標を (d_1, d_2) とおくと，座標の変換公式より，

$$x = x' + d_1, \qquad y = y' + d_2$$

となる．これを $y = 2x^2 - x + 1$ に代入すると

$$y' + d_2 = 2(x' + d_1)^2 - (x' + d_1) + 1 \iff y' = 2x'^2 + (4d_1 - 1)x' + (2d_1^2 - d_1 + 1 - d_2)$$

であるから，右辺の x' の係数と定数項が消えるように d_1, d_2 を定めればよい．

しかし，ここでは別の解法を用いる．$\mathcal{C}$ の定義式の右辺をの右辺を平方完成すると

$$y = 2x^2 - x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$$

であるから，$x - \dfrac{1}{4} = x'$，$y - \dfrac{7}{8} = y'$ とおけば，$\mathcal{C}$ の方程式は $y' = 2x'^2$ となる．上の式と座標変換の公式と比較することにより，$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ における $\underline{O' \text{ の座標が } \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{7}{8}\right)}$ であることがわかる．

4.2　基底の変換

4.3　一般の座標変換