3.4　線形変換の固有値と固有ベクトル

定義 **3.24.** 線形変換 f_M に対し，

$$f_M(\vec{v}) = \lambda\,\vec{v} \tag{3.12}$$

を満たすスカラー λ を f_M の固有値とよび，ベクトル $\vec{v}$（ただし，$\vec{v} \neq \vec{0}$）を固有値 λ に関する f_M の固有ベクトルとよぶ．

例 **3.25.** 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 3 に関する固有ベクトルであり，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は f_M の固有ベクトルではない．

固有値・固有ベクトルの性質と求め方

次に，定義式 (3.12) から固有値・固有ベクトルの性質を導く．λ が f_M の固有値で，零ベクトルでないベクトル $\vec{v}$ が λ に関する f_M の固有ベクトルであるとは，

$$M\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \tag{3.13}$$

を満たすことに他ならない．この式は次のように式変形することができる;

$$\begin{aligned} M\vec{v} = \lambda\,\vec{v} &\iff \lambda\,\vec{v} - M\vec{v} = \vec{0} \\ &\iff (\lambda\,I_n - M)\vec{v} = \vec{0}. \end{aligned}$$

この式が意味することは，「$\vec{v}$ は連立 1 次方程式 $(\lambda\,I_n - M)\vec{x} = \vec{0}$ の非自明解[*12]である」とうことである．一方，

$$\begin{aligned} (\lambda\,I_n - M)\vec{x} = \vec{0} \text{ は非自明解をもつ} &\iff \text{行列 } (\lambda\,I_n - M) \text{ は正則ではない} \\ &\iff \det(\lambda\,I_n - M) = 0 \end{aligned}$$

であるから，「f_M の固有値 λ は $\det(\lambda\,I_n - M) = 0$ を満たす数である」ことがわかる．

以上のことから，次の事実が成り立つ．

[*12] 斉次連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ は $\vec{x} = \vec{0}$ を解として持つ．これを自明解という．自明解でない解（つまり $\vec{0}$ 以外の解）を非自明解という．

定理 3.26. 正方行列 M によって定まる線形変換 f_M について，以下のことが成り立つ.

(1) λ が f_M の固有値であるための必要十分条件は $\det(\lambda I_n - M) = 0$ が成り立つことである.

(2) 固有値 λ に関する f_M の固有ベクトルは，斉次連立方程式 $(\lambda I_n - M)\vec{x} = \vec{0}$ の非自明解である.

(1) は「固有値とは t に関する方程式 $\det(t I_n - M) = 0$ の解である」ことを述べてる. 一般に，n 次正方行列 M に対し，$\det(t I_n - M)$ は t に関する n 次多項式である. これを M の固有多項式という.

線形変換の固有値・固有ベクトルは以下の手順で求めることができる.

線形変換 f_M の固有値，固有ベクトルの求め方

(1) 行列 M の固有多項式 $\det(tI_n - M)$ を求める.

(2) 方程式 $\det(tI_n - M) = 0$ の解 $t = \lambda$ を求める（この解が f_M の固有値である）.

(3) (2) で求めた各 λ に対し，斉次連立方程式 $(\lambda I_n - M)\vec{x} = \vec{0}$ の非自明解 $\vec{x} = \vec{v}$ を求める（この解 $\vec{v}$ が固有値 λ に関する f_M の固有ベクトルである）.

例 3.27. 行列 $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ によって定まる $\mathbb{R}^2$ の線形変換 f_M の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

解. M の固有多項式を求める;

$$\begin{aligned}\det(tI_2 - M) =& \det\begin{pmatrix} t-4 & 1 \\ -2 & t-1 \end{pmatrix} \\ =&(t-4)(t-1) - 1 \times (-2) \\ =&\underline{t^2 - 5t + 6} = (t-2)(t-3).\end{aligned}$$

よって，$\det(tI_2 - M) = 0$ の解は $\underline{2 \text{ と } 3}$ であり，これが f_M の固有値である.

$\lambda = 2$ のとき;

$$(2I_2 - M) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって，$\underline{\vec{u}_{(2)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ は固有値 2 に関する f_M の固有ベクトルである（ただし，$c_1 \neq 0$ は任意の実数）.

$\lambda = 3$ のとき;

$$(3I_2 - M) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって，$\underline{\vec{u}_{(3)} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ は固有値 3 に関する f_M の固有ベクトルである（ただし，$c_2 \neq 0$ は任意の実数）.

例 3.27 の結果から，線形変換 f_M は，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 方向には 2 倍の拡大変換として作用し，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向には 3 倍の拡大変換として作用することがわかる.

行列の対角化

2 次正方行列 M が異なる固有値 λ_1, λ_2 を持つとする．λ_i に関する固有ベクトルを $\vec{v}_i$ $(i = 1, 2)$ とし，このベクトルを列ベクトルとする行列を P とする．つまり，$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix}$．このとき，$M\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ より，

$$\begin{aligned} MP &= M \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\vec{v}_1 & M\vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{v}_1 & \lambda_2 \vec{v}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となる.

n 次正方行列 M に対し，$P^{-1}MP$ が対角行列となる正則行列 P が存在するとき，M は対角化可能であるという．上の議論から，P は M の固有ベクトルを列ベクトルとする行列であり，対角行列 $P^{-1}MP$ の対角成分は M の固有値であることがわかる．特に，M が対称行列のときは，直交行列 P によって対角化することができる.

例 **3.28.** 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列によって対角しなさい.

解. M の固有値は 3 と -1，固有ベクトルはそれぞれ $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ （ただし，c_1, c_2 は任意の実数）である．$P^{-1}MP$ が対角行列となるような P は，M の固有ベクトルを列ベクトルとする行列であるが，$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は任意の c_1, c_2 に対して直交しているので，ノルムが 1 となるように c_1, c_2 を定めれば，それを並べてできる行列は直交行列となる．例えば，$c_1 = c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とし，$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおくと，P は直交行列で，さらに $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる.

この例の結果から，$M = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ となる．P は角度 $\dfrac{\pi}{4}$ の回転変換を与え

る行列で，その逆行列 P^{-1} も回転変換を与える．また，対角行列は拡大・縮小変換を与えることから，対称行列 M が定義する線形変換は，回転変換と拡大・縮小変換の合成として表せることがわかる．

一般に 2 次正方行列が定義する線形変換は，拡大・縮小変換，せん断，回転，鏡映[*13]の有限個の合成として表すことができる（ただし，表し方は一意的ではない）．

例 3.29. 例 3.27 の行列 M を拡大・縮小変換，せん断，回転（または鏡映）を与える行列の有限個の積として表しなさい．

解. 例 3.27 の結果から，線形変換 f_M の固有値は 2 と 3，固有ベクトルはそれぞれ $\vec{v}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\vec{v}_2 = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．したがって，$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，すなわち $M = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$ となるが，c_1, c_2 をどのような値にしようと，P は直交行列にはなり得ない．そこで，$P\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が直交行列になるような c_1, c_2, a が存在するか考察する．

ここで，

$$P\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & a\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{pmatrix}$$

であるから，これが直交行列となるための条件は

$$\|\vec{v}_1\| = 1, \qquad \langle \vec{v}_1, a\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rangle = 0, \qquad \|a\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| = 1$$

である．この方程式を解くと，$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\vec{v}_2 = \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$a = -3$ となることがわかる．以上のことから，$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \sqrt{5} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$，とすると，$M = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$ となり，かつ $P\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ は直交行列となる．したがって，

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

を得る．これは，M によって定まる線形変換は 5 つの鏡映，せん断，拡大・縮小変換の合成として表せることを意味する．

[*13] 鏡映変換を与える行列の列（または行）を入れ替えた行列は回転変換を与える．したがって，任意の 2 次正方行列は拡大・縮小変換，せん断，回転を与える行列の有限個の積として表すことができる．