

--	--	--	--	--	--	--

## 注意事項

- 解を書いただけでは、たとえ正解でも加点しない。解とそれをどのように導いたかがわかるような説明、計算式などを記述すること。
- 配点は **1** 9点、**2** 12点、**3** 10点、**4** 12点であるが、合計点の上限は 25点とする。
- 友人と議論してもよいし、私への質問も歓迎する。ただし、理解したことを自身の言葉で書くこと。
- 提出場所は教育棟 1階事務のレポートボックス、提出期限は 12月3日(火) 16:50(事務が閉まったら終わり)とする。

**1** 行列  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 8 \end{pmatrix}$  について、次の

問に答えなさい。

- (1)  $\mathbb{R}^2$  の線形変換  $f_M$  について次の問に答えなさい。
  - (a)  $f_M$  による点  $(3, -1)$  の像の座標を求めなさい。(2点)
  - (b)  $f_M$  による点  $P$  の像の座標が  $(-4, 2)$  のとき、 $P$  の座標を求めなさい。(3点)
- (2)  $\mathbb{R}^3$  の線形変換  $f_N$  によって原点に移る点の全体はどのような図形か、答えなさい。(4点)

**2**  $\mathbb{R}^2$  のせん断を定義する行列  $S_a^x = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  について以下の問に答えなさい。(各4点)

- (1)  $x$  軸に平行な直線  $\vec{p}(t) = (t, k)$  (ただし、 $k$  は定数) は、 $S_a^x$  で変換しても不変であることを示しなさい。
- (2)  $y$  軸に平行な直線  $\vec{q}(t) = (k, t)$  (ただし、 $k$  は定数) を  $S_a^x$  で変換すると、その像は直線になる。その直線上の点  $(x, y)$  が満たす方程式を求めなさい。
- (3)  $S_a^x$  と  $S_b^x$  の積を計算することにより、せん断の合成変換もせん断であることを示しなさい。

--	--	--	--	--	--	--	--

3  $\mathbb{R}^2$  の原点を中心とする回転変換と、原点を通る直線に関する鏡映変換について次の問に答えなさい。(各 5 点)

- (1) 2 つの異なる鏡映変換の合成変換は回転変換であることを示しなさい。
- (2) 回転変換と鏡映変換の合成変換は鏡映変換であることを示しなさい。

4 次の各問に答えなさい。

(1) 直交行列の定義を述べなさい。(3 点)

(2)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$  が直交行列ではないことを示しなさい。(3 点)

(3)  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$  が直交行列となるような  $a, b$  の組み合わせをすべて求めなさい。(4 点)

(4) 2 つの直交行列  $A, B$  の積  $AB$  も直交行列であることを示しなさい。(4 点)