情報数学 III 小テスト（12 月 2 日） 解答

$\boxed{1}$

(1) (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}$.

(b) $P(x, y)$ とおくと，仮定より $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ であるから，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}}$.

(2) 求めるものは $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす点 (x, y, z) 全体のなす図形である．これは

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x - 6y + 8z = 0 \end{cases}$$

と同値なので，求めるものは上の連立 1 次方程式の解である．この連立方程式を解くと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

となる．これは $\underline{\text{原点を通り方向ベクトル } (2, -5, -4) \text{ の直線}}$ である．

$\boxed{2}$

(1) $\vec{p}(t) = (t, k)$ は点 $(0, k)$ を通り，方向ベクトルが $(1, 0)$ の直線である．
$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + ak \\ k \end{pmatrix}$ より，$\vec{p}(t)$ の像は点 (ak, k) を通り，方向ベクトルが $(1, 0)$ の直線であるが，これは元の直線と同じである．

(2) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + at \\ t \end{pmatrix}$.
したがって，$(x, y) = (k + at, t)$ とおいて，t を消去することにより $\underline{x = ay + k}$ を得る．

(3) $S_a^x S_b^x = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S_{a+b}^x$.
したがって，せん断の合成もせん断である．

情報数学 III 小テスト（12 月 2 日） 解答

$\boxed{3}$

(1) 鏡映変換を与える行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ である．したがって，異なる 2 つの鏡映変換の合成は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta-\varphi) & -\sin(\theta-\varphi) \\ \sin(\theta-\varphi) & \cos(\theta-\varphi) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

によって定義される線形変換である．これは原点を中心とする角度 $(\theta-\varphi)$ の回転変換である．

(2) 角度 θ の回転変換を与える行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，鏡映変換を与える行列は $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ なので，これらの合成変換は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi - \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & \sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & -\cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

によって定義される線形変換である．これは鏡映変換を与える．

$\boxed{4}$

(1) ${}^t\!A\,A = A\,{}^t\!A = I_n$ を満たす正方行列 A を直交行列という（ただし，I_n は単位行列）．

(2) ${}^t\!\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
したがって，直交行列ではない．

(3) ${}^t\!\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2+b^2 \end{pmatrix}$.
したがって，これが単位行列となるためには，$a=0, b^2=1$ でなければならない．よって，求める a, b の組み合わせは $\underline{(a,b)=(0,1),\ (0,-1)}$ である．

(4) A, B は直交行列であるので，${}^t\!A\,A = A\,{}^t\!A = I_n$ および ${}^t\!B\,B = B\,{}^t\!B = I_n$ が成り立つ．ここで，$C = AB$ とおくと，

$${}^t C\,C = {}^t(AB)(AB) = \left({}^t B\,{}^t\!A\right)(AB) = {}^t B\left({}^t\!AA\right)B = {}^t B I_n B = {}^t BB = I_n$$

となるので，積 AB も直交行列である．