によって定まる線形変換である[8].

定理 3.18. 原点を通る直線 ℓ に関する鏡映は原点を中心とする回転と x 軸に関する鏡映[9]の合成変換として表すことができる.

アフィン変換

定義 3.19. 正方行列 A とベクトル $\vec{v}$ に対し，平行移動と線形変換の合成変換 $f = f_{\vec{v}} \circ f_A$ を A と $\vec{v}$ によって定まるアフィン変換という（つまり，$f(\vec{p}) = A\vec{p} + \vec{v}$).

定理 3.20. f を行列 A とベクトル $\vec{v}$ によって定まるアフィン変換とする．このとき，3 点 P, Q, R が一直線上の点ならば，f によるそれらの像 P', Q', R' も一直線上にあり，さらにその比は保たれる．つまり，$PQ : QR = P'Q' = Q'R'$ である.

Proof. 3 点 P, Q, R が同一直線上にあるとすると，$\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PR}$ となる k が存在する．つまり，P, Q, R の位置ベクトル $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ は $\vec{q} - \vec{p} = k(\vec{r} - \vec{p})$ を満たす．このとき，$f = f_A \circ f_{\vec{v}}$ より

$$\overrightarrow{P'Q'} = f(\vec{q}) - f(\vec{p}) = (A\vec{q} + \vec{v}) - (A\vec{p} + \vec{v}) = A\vec{q} - A\vec{p} = A(\vec{q} - \vec{p}) = k\,A(\vec{r} - \vec{p}).$$

同様に，

$$\overrightarrow{P'R'} = f(\vec{r}) - f(\vec{p}) = (A\vec{r} + \vec{v}) - (A\vec{p} + \vec{v}) = A\vec{r} - A\vec{p} = A(\vec{r} - \vec{p}).$$

以上のことから，$\overrightarrow{P'Q'} = k\overrightarrow{P'R'}$ を得る．これは P', Q', R' も一直線上にあり，距離の比が $PQ : QR = P'Q' = Q'R'$ を満たすことを意味する. □

定義 3.21. 直交行列 A とベクトル $\vec{v}$ によって決まるアフィン変換 $f = f_{\vec{v}} \circ f_A$ を合同変換という.

注意 3.22. 直交変換も平行移動も 2 点間の距離を保つ[10]ので，その合成である合同変換も 2 点間の距離を保つ変換であり，任意の 2 点間の距離を保つ変換は合同変換に限る.

3.3.2　逆変換

定義 3.23. 変換 f に対し，$f \circ g = g \circ f = I$ を満たす変換 g を f の逆変換とよび，$g = f^{-1}$ と表す.

　定理 3.17 より，$f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$，$f_{\vec{v}}^{-1} = f_{-\vec{v}}$ である．線形変換の例から，どんな変換についても，その逆変換が存在するとは限らない[11].

[8] (3.11) 式の θ は 2φ に他ならない.
[9] この変換は，拡大・縮小変換を与える線形変換の特別な場合であることに注意せよ.
[10] 定理 3.9 (2) および定理 3.14(2) を参照.
[11] 厳密の述べると，f が全単射の場合に限り，逆変換が存在する.

3.4　線形変換の固有値と固有ベクトル

定義 3.24. 線形変換 f_M に対し，

$$f_M(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \tag{3.12}$$

を満たすスカラー λ を f_M の固有値とよび，ベクトル $\vec{v}$（ただし，$\vec{v} \neq \vec{0}$）を固有値 λ に関する f_M の固有ベクトルとよぶ.

例 3.25. 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 3 に関する固有ベクトルであり，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は f_M の固有ベクトルではない.