3.2 平行移動

定義 3.12. ベクトル $\vec{v}$ に対し，$\vec{p} \mapsto \vec{p} + \vec{v}$ で定義される変換を $\vec{v}$ 方向への平行移動といい，$f_{\vec{v}}$ と書く（つまり，$f_{\vec{v}}(\vec{p}) = \vec{p} + \vec{v}$）.

注意 3.13. $\vec{v} = \vec{0}$ のとき，$f_{\vec{v}}$ は恒等変換 I_n である.

定理 3.14. 平行移動 $f_{\vec{v}}$ は以下の性質を満たす;

(1) $\vec{v} \neq \vec{0}$ のとき，$f_{\vec{v}}$ は不動点を持たない.

(2) $f_{\vec{v}}$ は 2 点間の距離を保つ．すなわち，任意の点 P, Q に対し，$P' = f_{\vec{v}}(P), Q' = f_{\vec{v}}(Q)$ とすると，$|PQ| = |P'Q'|$ が成り立つ.

Proof. (1) $\vec{p}$ が $f_{\vec{v}}$ の不動点ならば，$\vec{p} = f_{\vec{v}}(\vec{p}) = \vec{p} + \vec{v}$，つまり $\vec{v} = \vec{0}$ となるので，定理の仮定に矛盾する.

(2) 点 P, Q の位置ベクトルを $\vec{p}, \vec{q}$ とすると，

$$|P'Q'| = \|\overrightarrow{P'Q'}\| = \|f_{\vec{v}}(\vec{q}) - f_{\vec{v}}(\vec{p})\| = \|(\vec{q} + \vec{v}) - (\vec{p} + \vec{v})\| = \|\vec{q} - \vec{p}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = |PQ|.$$

□

例 3.15. 座標平面上の方程式 $y = ax^2$ を満たす点 (x, y) 全体のなす図形（つまり放物線）を C とする．$\vec{v} = (v_1, v_2)$ によって定まる平行移動 $f_{\vec{v}}$ による C の像の方程式を求めなさい.

解. C 上の点を $\vec{x} = (x, y)$ とおき，$\vec{x}$ の $f_{\vec{v}}$ による像 $f_{\vec{v}}(\vec{x})$ を $\vec{X} = (X, Y)$ とおく．つまり，$(X, Y) = (x, y) + (v_1, v_2) = (x + v_1, y + v_2)$．$\vec{x}$ は C 上の点であるから $y = ax^2$ を満たす．$x = X - v_1$, $y = Y - v_2$ を $y = ax^2$ に代入すると，$(Y - v_2) = a(X - v_1)^2$．したがって，$f_{\vec{v}}$ による C の像の方程式は $\underline{y = a(X - v_1)^2 + v_2}$ である.

3.3 合成変換と逆変換

3.3.1 合成変換

定義 3.16. 2 つの変換 f と g に対し，

$$\vec{p} \longmapsto f(g(\vec{p}))$$

で定義される変換を f と g の合成変換とよび，$f \circ g$ で表す.

例 3.17. (1) n 次正方行列 A, B に対し，

$$f_A \circ f_B(\vec{p}) = f_A(f_B(\vec{p})) = f_A(B\vec{p}) = A(B\vec{p}) = (AB)\vec{p} = f_{AB}(\vec{p}).$$

つまり，$f_A \circ f_B = f_{AB}$ が成り立つ．

(2) 平行移動については，ベクトル $\vec{v}, \vec{u}$ に対し，$f_{\vec{v}} \circ f_{\vec{u}} = f_{\vec{v}+\vec{u}}$ が成り立つ（証明は省略）．

一般に，2 つの変換 f, g に対して，$f \circ g \neq g \circ f$ であることに注意せよ[7]．

平面における鏡映と回転

$\mathbb{R}^2$ 内の原点を通る直線 ℓ に関する鏡映変換は行列

$$R_\theta^- = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

によって定まる線形変換であることを示す．

この鏡映を f とし，ℓ と x 軸とのなす角を φ とする（図 3.8 左）．x 軸に関する鏡映変換を g とすると，$g(x, y) = (x, -y)$ より，g は行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ によって定まる線形変換である．

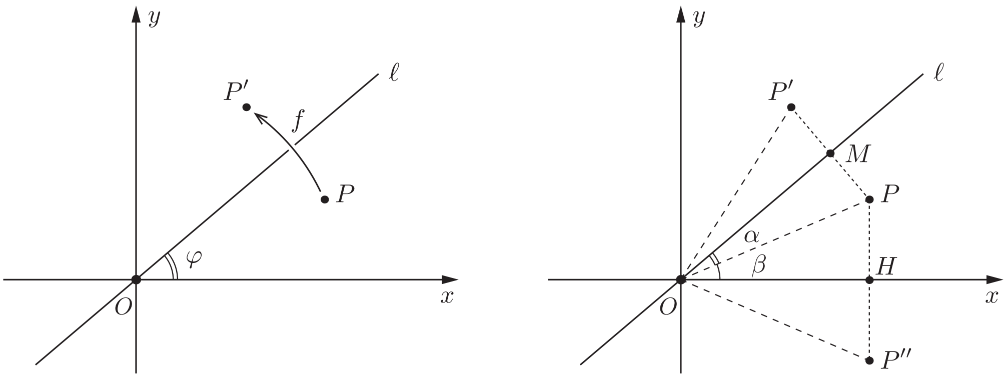

図 3.8　平面内の原点を通る直線 ℓ に関する鏡映

点 P に対し $P' = f(P)$，$P'' = g(P)$ とし，線分 PP' と ℓ との交点を M，線分 PP'' と x 軸との交点を H とおく（図 3.8 右）．鏡映の定義から，$\triangle POM$ と $\triangle P'OM$ は合同なので，$\angle POM = \angle P'OM$ である（これを α とおく）．同様に，$\angle POH = \angle P''OH$ を得る（これを β とおく）．すると $\alpha + \beta = \varphi$ であるから，$\angle P'OP'' = 2\varphi$ が成り立つ．つまり，h_θ を θ-回転変換とすると，

$$f(P) = P' = h_{2\varphi}(P'') = h_{2\varphi}(g(P) = h_{2\varphi} \circ g(P)$$

となる．P の選び方は任意なので，$f = h_{2\varphi} \circ g$ が成り立つことがわかる．$h_{2\varphi}$ も g も線形変換なので，例 3.17 (1) より，f は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

[7] $f \circ g = g \circ f$ が成り立つとき，「f と g は可換である」という．

によって定まる線形変換である[*8].

アフィン変換

定義 3.18. 正方行列 A とベクトル $\vec{v}$ に対し，平行移動と線形変換の合成変換 $f = f_{\vec{v}} \circ f_A$ を A と $\vec{v}$ によって定まるアフィン変換という（つまり，$f(\vec{p}) = A\vec{p} + \vec{v}$).

3.3.2　逆変換

3.4　線形変換の固有値と固有ベクトル

[*8] (3.11) 式の θ は 2φ に他ならない.