直交変換

定義 3.8. n 次正方行列で，${}^tA\,A = A\,{}^tA = I_n$ を満たす行列 A を直交行列という（ただし，${}^tA$ は行列 A の転置行列を表す）．直交行列 A によって生成される線形変換 f_A を直交変換という．

定理 3.9. A を直交行列とする．このとき，直交変換 f_A は以下を満たす;

(1) f_A は内積を保つ．すなわち，任意のベクトル $\vec{v}, \vec{u}$ に対し，$\langle f_A(\vec{v}), f_A(\vec{u})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$ が成り立つ．

(2) f_A は 2 点間の距離を保つ．すなわち，任意の点 P, Q に対し，$P' = f_A(P), Q' = f_A(Q)$ とすると，$|PQ| = |P'Q'|$ が成り立つ．

Proof. (1) ベクトル $\vec{p}, \vec{q}$ を $n \times 1$ 行列 $(n = 2, 3)$ とみなすと，内積 $\langle \vec{p}, \vec{q}\rangle$ は行列の積 ${}^t\vec{p}\,\vec{q}$ と解釈することができる．例えば，空間ベクトル $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ に対し，

$$
{}^t\vec{p}\,\vec{q} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \end{pmatrix}
$$

となり，上式の右辺は 1×1 行列であるが，これを実数（スカラー）と同一視すると，$\langle \vec{p}, \vec{q}\rangle$ に等しいことがわかる．この同一視の下で，直交行列 A に対し $\langle f_A(\vec{v}), f_A(\vec{u})\rangle$ を計算すると

$$
\langle f_A(\vec{v}), f_A(\vec{u})\rangle = {}^t(A\vec{v})\,(A\vec{u}) = \left({}^t\vec{v}\,{}^tA\right)\,(A\,\vec{u}) = {}^t\vec{v}\,\left({}^tA\,A\right)\,\vec{u} = {}^t\vec{v}\,I_n\,\vec{u} = {}^t\vec{v}\,\vec{u} = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle
$$

となり，f_A が内積を保存することがわかる[*5]．

(2) 点 P, Q の位置ベクトルを $\vec{p}, \vec{q}$ をすると，

$$
|PQ| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\vec{q} - \vec{p}\| = \sqrt{\langle \vec{q} - \vec{p}, \vec{q} - \vec{p}\rangle}
$$

である．一方，

$$
\begin{aligned}
|P'Q'| =& \|\overrightarrow{P'Q'}\| = \|f_M(\vec{q}) - f_M(\vec{p})\| = \|f_M(\vec{q} - \vec{p})\| \\
=& \sqrt{\langle f_M(\vec{q} - \vec{p}), f_M(\vec{q} - \vec{p})\rangle}
\end{aligned}
$$

となり，(1) の結果より，$|P'Q'| = \sqrt{\langle \vec{q} - \vec{p}, \vec{q} - \vec{p}\rangle} = |PQ|$ を得る． □

注意 3.10. 内積を保存する線形変換は直交変換に限る．

この小節の最後に，直交行列の性質を挙げておく;

[*5] 2 つ目の等号は，積の転置の性質 ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ を使っている．

直交変換の性質

A を n 次直交行列とする．このとき，以下が成り立つ;

(1) A は正則行列である．
(2) 行列式の値は $\det(A) = \pm 1$．
(3) A の第 i 列を成分とするベクトルを $\vec{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とすると，$\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = \delta_{ij}$ が成り立つ．

直交行列の定義式から，$A^{-1} = {}^tA$ なので，(1) は明らかである．
一般に，任意の正方行列 A, B に対し，

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B), \qquad \det({}^tA) = \det(A)$$

が成り立つ．したがって，A が直交行列ならば，

$$1 = \det(I_n) = \det({}^tA\,A) = \det({}^tA) \times \det(A) = \det(A) \times \det(A)$$

となり，$(\det(A))^2 = 1$ を得る[*6]．

次に，直交行列が正規直交基底と関係があることを述べる．そのために，行列を「(列) ベクトルを並べたもの」とみる．例えば，行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ は 2 つのベクトル $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$，$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ が並んだ行列 $\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{pmatrix}$ と見なすことができる．すると，一般の行列 $A = (\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\cdots\,\vec{a}_n)$，$B = (\vec{b}_1\,\vec{b}_2\,\cdots\,\vec{b}_n)$ に対し，

$$\begin{aligned}
{}^tB\,A &= \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1 \\ {}^t\vec{b}_2 \\ \vdots \\ {}^t\vec{b}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1\,\vec{a}_1 & {}^t\vec{b}_1\,\vec{a}_2 & \cdots & {}^t\vec{b}_1\,\vec{a}_n \\ {}^t\vec{b}_2\,\vec{a}_1 & {}^t\vec{b}_2\,\vec{a}_2 & \cdots & {}^t\vec{b}_2\,\vec{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t\vec{b}_n\,\vec{a}_1 & {}^t\vec{b}_n\,\vec{a}_2 & \cdots & {}^t\vec{b}_n\,\vec{a}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \langle \vec{b}_1, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{b}_1, \vec{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{b}_1, \vec{a}_n \rangle \\ \langle \vec{b}_2, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{b}_2, \vec{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{b}_2, \vec{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{b}_n, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{b}_n, \vec{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{b}_n, \vec{a}_n \rangle \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるので，A が直交行列ならば，${}^tA\,A$ の (i, j) 成分は $\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle$ 等しく，${}^tA\,A = I_n$ であることから，$\langle \vec{a}_i, \vec{a}_{\rangle} = \delta_{ij}$ を得る．

[*6] 直交行列ならば，行列式が ± 1 となるのであって，$|\det(A)| = 1$ だからといって A が直交行列とは限らないことに注意せよ．たとえば，せん断を定義する行列 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $a \neq 0$ のとき直交行列ではないが，行列式の値は 1 である．

3.2　平行移動

定義 **3.11.** ベクトル $\vec{v}$ に対し，$\vec{p} \mapsto \vec{p} + \vec{v}$ で定義される変換を $\vec{v}$ 方向への平行移動といい，$f_{\vec{v}}$ と書く（つまり，$f_{\vec{v}}(\vec{p}) = \vec{p} + \vec{v}$）.

注意 **3.12.** $\vec{v} = \vec{0}$ のとき，$f_{\vec{v}}$ は恒等変換 I_n である.

定理 **3.13.** 平行移動 $f_{\vec{v}}$ は以下の性質を満たす;

(1) $\vec{v} \neq \vec{0}$ のとき，$f_{\vec{v}}$ は不動点を持たない.
(2) $f_{\vec{v}}$ は 2 点間の距離を保つ．すなわち，任意の点 P, Q に対し，$P' = f_{\vec{v}}(P), Q' = f_{\vec{v}}(Q)$ とすると，$|PQ| = |P'Q'|$ が成り立つ.

3.3　合成変換と逆変換

3.3.1　合成変換

平面における鏡映と回転

アフィン変換

3.3.2　逆変換

3.4　線形変換の固有値と固有ベクトル