する平面を π とし，π と ℓ の交点を O' とする．このとき，点 O' を中心とする平面 π 上の θ-回転を P に施した点 Q を，P の ℓ に関する θ-回転像と定義する（図 3.5 右）．特に，x 軸，y 軸，z 軸を回転軸とする回転変換は以下の行列によって与えられる;

$$R_\theta^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ R_\theta^y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},\ R_\theta^z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

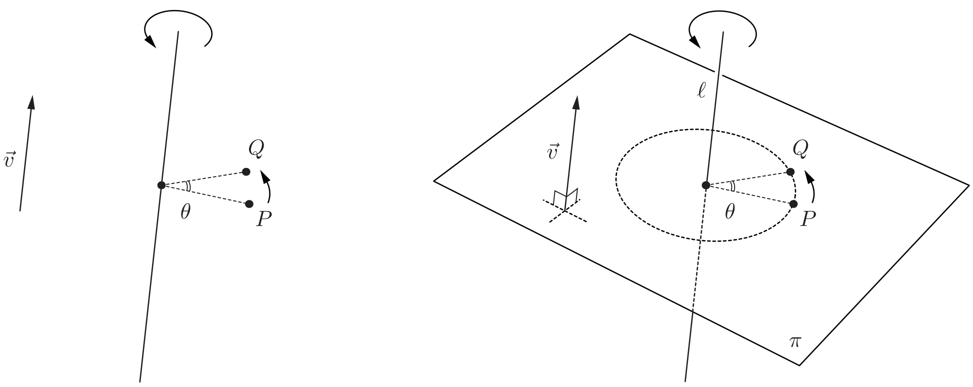

図 3.5 空間内の直線 ℓ を回転軸とする角度 θ の回転変換

一般に，原点を通り方向ベクトルが $\vec{v} = (a, b, c)$（ただし，$\vec{v}$ は単位ベクトルとする．つまり $a^2 + b^2 + c^2 = 1$）の直線を回転軸とする θ-回転は行列

$$\begin{aligned} R_\theta^{(a,b,c)} &= \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ca + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ca - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix} \\ &= \cos\theta\, I_3 + (1-\cos\theta) \begin{pmatrix} a^2 & ab & ca \\ ab & b^2 & bc \\ ca & bc & c^2 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.8}$$

によって与えられる線形変換である．

鏡映変換

平面内の原点を通る直線 ℓ に対し，次のように変換 f を定義する; 点 P に対し，P を通り ℓ に直交する直線を m とする．このとき，点 $f(P)$ を (i) m 上の点で，(ii) P と $f(P)$ の中点が ℓ と m との交点となるように定める（図 3.6 左）．このようにして定まる変換 $f : P \mapsto f(P)$[*2]を直線 ℓ に関する鏡映とよぶ．

鏡映は，行列

$$R_\theta^- = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

[*2] この変換は，ℓ が原点を通らない直線であっても定義できるが，この場合は線形変換にならない．

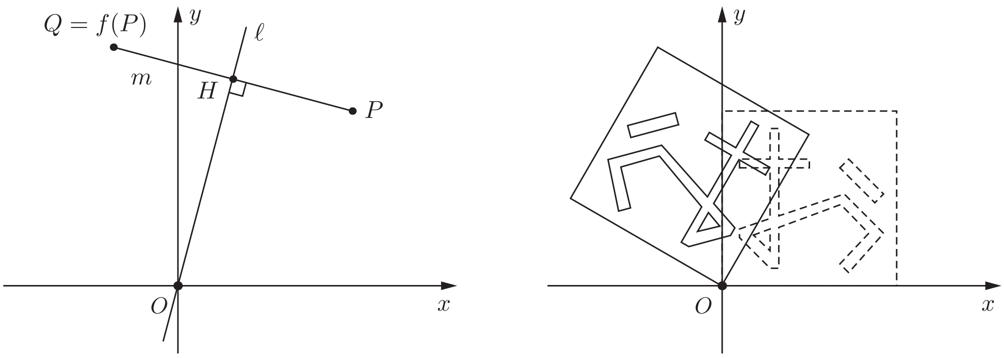

図 3.6　$\mathbb{R}^2$ 内の直線 ℓ に関する鏡映変換

によって定義される線形変換である[*3]．特に，

$$R_0^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad R_\pi^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ x 軸，y 軸に関する鏡映である．

空間 $\mathbb{R}^3$ においても，原点を通る平面 π に関する同様の変換を定義することができる．つまり，点 P に対し，点 P を通り π に直交する直線を m とする．このとき，点 $f(P)$ を (i) m 上の点で，(ii) P と $f(P)$ の中点が π と m の交点となるように定める．このようにして定まる変換 $f : P \mapsto f(P)$ を平面 π に関する鏡映とよぶ．

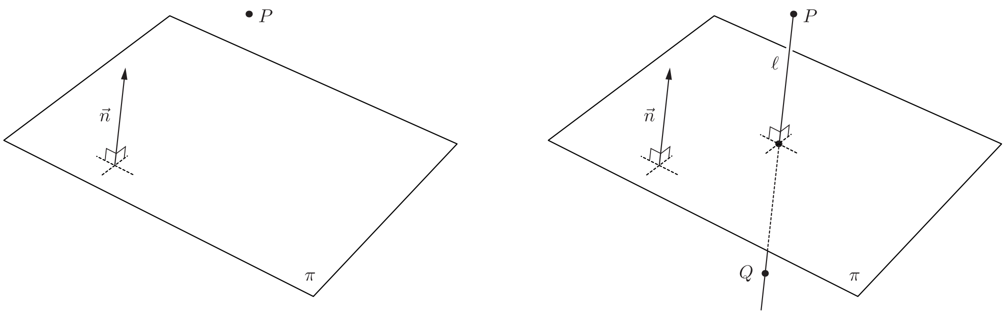

図 3.7　空間内の平面 π に関する鏡映

平面 π の法線ベクトルが $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ のとき（ただし，$\vec{n}$ は単位ベクトルとする．つまり，$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$），$\pi$ に関する鏡映は，行列

$$R_{(\alpha,\beta,\gamma)}^- = \begin{pmatrix} 1-2\alpha^2 & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma \\ -2\alpha\beta & 1-2\beta^2 & -2\beta\gamma \\ -2\alpha\gamma & -2\beta\gamma & 1-2\gamma^2 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

によって定義される線形変換である[*4]．

[*3] 鏡映が線形変換であるという事実については第 3 節で述べる．

[*4] 空間内の平面に関する鏡映も，一般の平面に対して定義できるが，原点を通らない平面の場合は線形変換にならない．

直交変換

定義 3.8. n 次正方行列で，${}^{t}\!A\,A = A\,{}^{t}\!A = I_n$ を満たす行列 A を直交行列という（ただし，${}^{t}\!A$ は行列 A の転置行列を表す）．直交行列 A によって生成される線形変換 f_A を直交変換という．

定理 3.9. A を直交行列とする．このとき，直交変換 f_A は以下を満たす;

(1) f_A は内積を保つ．すなわち，任意の $\vec{v}, \vec{u}$ に対し，$\langle f_A(\vec{v}), f_A(\vec{u})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$ が成り立つ．

(2) f_A は 2 点間の距離を保つ．すなわち，任意の点 P, Q に対し，$P' = f_A(P), Q' = f_A(Q)$ とすると，$|PQ| = |P'Q'|$ が成り立つ．

3.2　平行移動

3.3　合成変換と逆変換

3.3.1　合成変換

3.3.2　逆変換

3.3.3　アフィン変換

3.4　線形変換の固有値と固有ベクトル