で，この場合は直線は f_M によって 1 点につぶれてしまう．一般的に次が成り立つ．

定理 3.5. 直線は線形変換 f_M によって，直線，または 1 点に移される．また，平面は線形変換 f_M によって，平面，直線，または 1 点に移される．

線形変換の性質としては次の事実が本質的である．

定理 3.6. $\mathbb{R}^n$ の変換（写像）$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ と実数 c に対して

$$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}), \qquad f(c\,\vec{a}) = c\,f(\vec{a})$$

を満たすとする．このとき，f は線形変換である．つまり，$f = f_M$ となる行列 M が存在する．

Proof. 平面 $\mathbb{R}^2$ の変換 f について示す（空間の変換についても同様に示せる）．$\mathbb{R}^2$ の基本ベクトルを $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ とすると，任意の点 $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ は線形結合 $\vec{p} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2$ と表される．仮定から

$$f(\vec{p}) = f(p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2) = f(p_1\vec{e}_1) + f(p_2\vec{e}_2) = p_1 f(\vec{e}_1) + p_2 f(\vec{e}_2)$$

となる．$f(\vec{e}_j)$ も $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ の線形結合で表せるので，$f(\vec{e}_j) = a_{1j}\,\vec{e}_1 + a_{2j}\,\vec{e}_2$ となる実数 a_{ij} が定まる[*1]．このとき，

$$\begin{aligned} f(\vec{p}) =& p_1 f(\vec{e}_1) + p_2 f(\vec{e}_2) \\ =& p_1\,(a_{11}\,\vec{e}_1 + a_{21}\,\vec{e}_2) + p_2\,(a_{12}\,\vec{e}_1 + a_{22}\,\vec{e}_2) \\ =& (p_1 a_{11} + p_2 a_{12})\,\vec{e}_1 + (p_1 a_{21} + p_2 a_{22})\,\vec{e}_2 \end{aligned}$$

つまり，$f(\vec{p})$ を成分表示すると

$$f(\vec{p}) = \begin{pmatrix} p_1 a_{11} + p_2 a_{12} \\ p_1 a_{21} + p_2 a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

となり，f は行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ によって生成される線形変換であることがわかる． □

3.1.2　主な線形変換

恒等変換

定義 3.7. 単位行列 I_n によって生成される線形変換を恒等変換といい，I と書く．つまり，I は任意の点 $\vec{p}$ に対し，$I(\vec{p}) = \vec{p}$ を満たす変換である．

[*1] この数 $\{a_{ij}\}$ は座標系と f にのみ依存して決まる．

拡大・縮小，相似変換

対角行列

$$D_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad (a, b \neq 0)$$

は平面内の図形の拡大や縮小，相似変換を表す（裏返りも含む）．たとえば，行列 $D_{(a,1)}$ に対し，

$$D_{(a,1)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ y \end{pmatrix}$$

であるから，$D_{(a,1)}$ から定まる線形変換によって，点は x 軸方向にのみ移動する（a 倍される）．$|a| > 1$ のときは x 軸方向の拡大変換となり（図 3.1(i)），$0 < |a| < 1$ のときは x 軸方向の縮小変換となる．ただし，a が負のときは図形が裏っ返しになるこに注意せよ(図 3.1(ii))．

同様に，$D_{(1,b)}$ から定まる線形変換は y 軸方向の拡大・縮小である（図 3.1(iii)）．$D_{(a,a)} (= aI_2)$ は相似拡大（$|a| > 1$）または，相似縮小（$0 < |a| < 1$）を定める（図 3.1(iv)）．

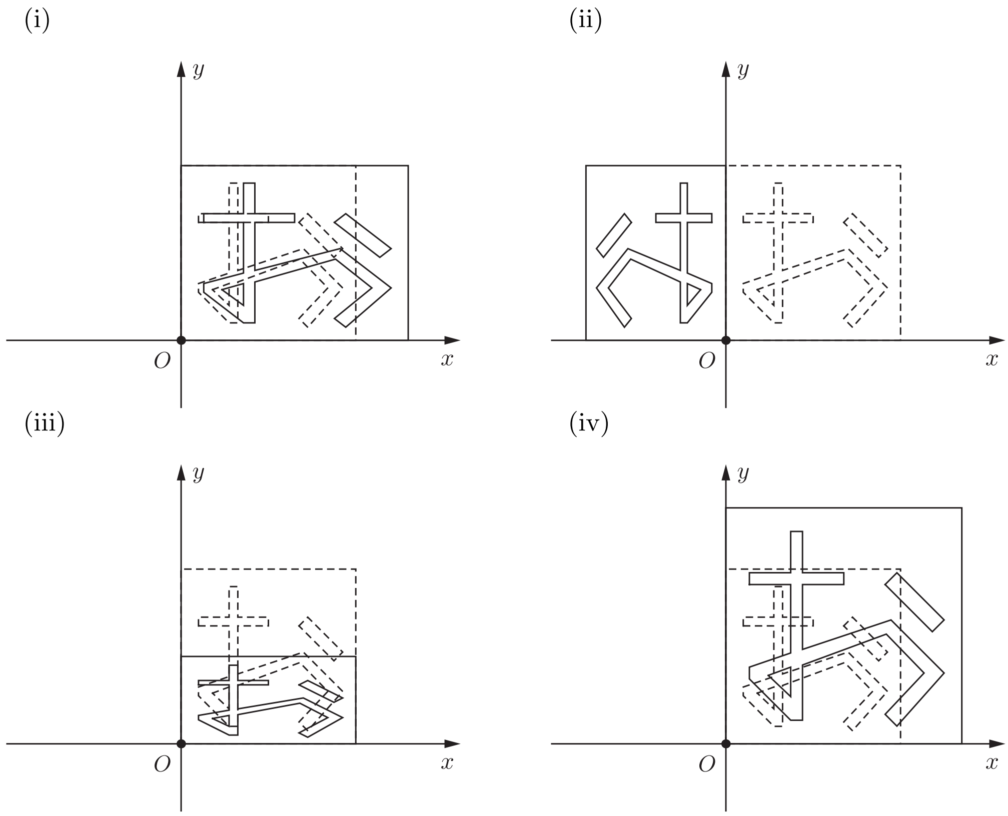

図 3.1　平面における拡大・縮小と相似変換

空間 $\mathbb{R}^3$ における拡大・縮小・相似変換は対角行列

$$D_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad (a, b, c \neq 0)$$

によって定義される．

せん断

対角成分がすべて 1 の三角行列

$$S_a^x = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_a^y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

が定める線形変換をせん断とよぶ．

せん断とは，どのような変換か考える．行列 S_a^x に対し，

$$S_a^x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay \\ y \end{pmatrix}$$

であるから，S_a^x から定まる線形変換によって，点は x 軸方向にずれる．ただし，ずれ幅は点の y 座標に依存し，ずれの方向は a の符号に依存する（図 3.2 左）．同様に，行列 S_a^y が定める線形変換によって，点は y 軸方向にずれる（図 3.2 右）．

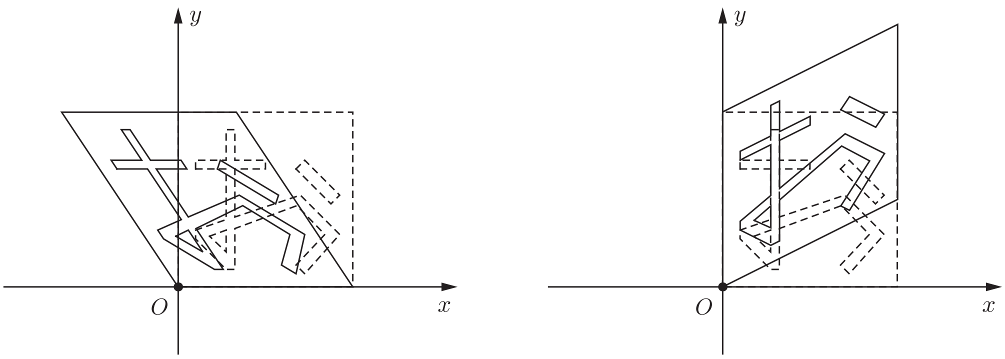

図 3.2　平面におけるせん断

同様に，空間 $\mathbb{R}^3$ のせん断とは，3 次三角行列

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

によって定義される線形変換をのことをいう．

回転変換

実数 θ に対し，行列

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

が定める線形変換は平面の原点を中心とする，角度 θ の回転（反時計回り）を与えることを示す．

平面の任意の $P(x, y)$ は，$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ と表すことができる（これを平面上の点の極表示という）．ここで，r は原点からの距離（つまり，$r = \|\overrightarrow{OP}\|$）で，$\varphi$ は x 軸と線分 OP とのなす角（図 3.3 を参照）である．

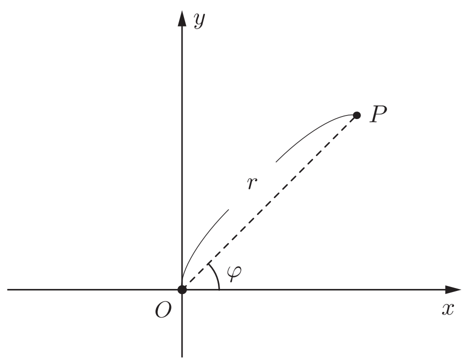

図 3.3　平面上の点の極表示

すると，三角関数の加法定理から

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\theta) \\ r\sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix}$$

となるが，これは反時計周りにちょうど θ だけ回転していることを意味する（図 3.6 左）．

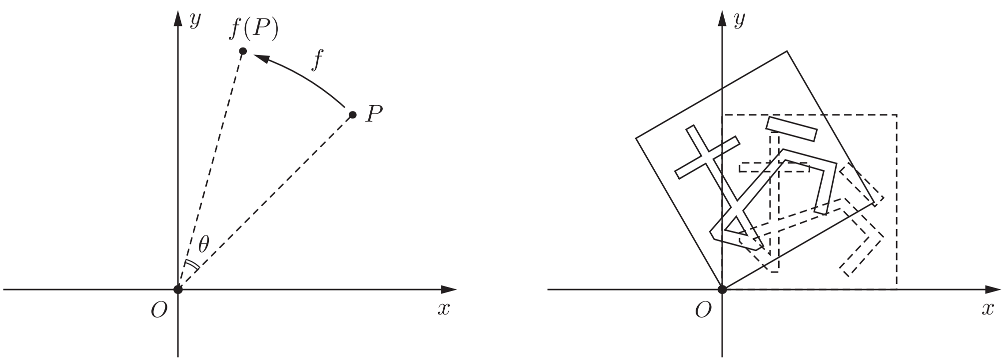

図 3.4　原点を中心とする角度 θ の回転変換

空間 $\mathbb{R}^3$ では，直線 ℓ（方向ベクトルは単位ベクトル $\vec{v}$）が与えられると，それを軸とする θ-回転が次のように定義できる（図 3.5 左）; 点 P に対し，P を通り $\vec{v}$ を法線ベクトル

する平面を π とし，π と ℓ の交点を O' とする．このとき，点 $\emptyset'$ を中心とする平面 π の θ-回転を P に施した点 Q を，P の ℓ に関する θ-回転像と定義する（図 3.5 右）．平面 $\mathbb{R}^2$

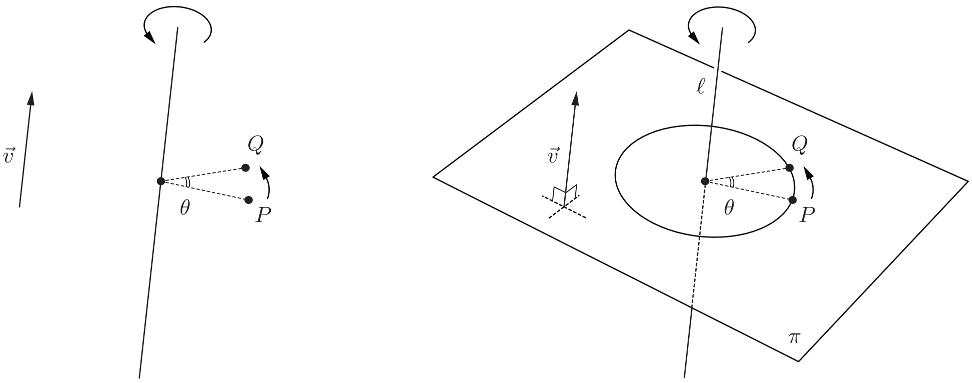

図 3.5　空間内の直線 ℓ を回転軸とする角度 θ の回転変換

における回転変換の自然な拡張として，x 軸，y 軸，z 軸を回転軸とする回転変換は以下の行列によって得られることがわかる;

$$R^x_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ R^y_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},\ R^z_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

一般に，原点を通り方向ベクトルが $\vec{v} = (a, b, c)$（ただし，$\vec{v}$ は単位ベクトルとする．つまり $a^2 + b^2 + c^2 = 1$）の直線を回転軸とする θ-回転は行列

$$R^{(a,b,c)}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ca + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ca - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix}$$

によって与えられる線形変換である．

鏡映変換

直交変換

3.2　平行移動

3.3　合成変換と逆変換

3.3.1　合成変換

3.3.2　逆変換

3.3.3　アフィン変換

3.4　線形変換の固有値と固有ベクトル