情報数学 III 中間試験 解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(1,1,-2)$

(1) $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$ を用いる（2 点）と，

$$\cos\theta=\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}=\frac{1\times1+2\times1+3\times(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{-3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\underline{-\frac{3}{2\sqrt{21}}}.\text{(2 点)}$$

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=\underline{(-7,5,-1)}$.

(3) 求めるベクトルを $\vec{c}$ をおくと，$\vec{c}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交するので，外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ と平行である．つまり，$\vec{c}=k(\vec{a}\times\vec{b})$ と書ける．さらに，$\|\vec{c}\|\,(=|k|\,\|\vec{a}\times\vec{b}\|)$ は「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積」に等しいが，これは $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ に他ならない（外積ベクトルの性質）．したがって，$|k|=1$ である．つまり，求めるベクトルは $\pm(\vec{a}\times\vec{b})=\underline{\pm(-7,5,-1)}$ （1 つのベクトルしか書いていなければ 2 点減点）．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\vec{p}(t,s)=(1+t-s,2-2t+s,3+t)=(1,2,3)+t(1,-2,1)+s(-1,1,0)$

(1) 平面のパラメーター表示 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{v}+s\vec{u}$ （ただし，$\vec{a},\vec{v},\vec{u}$ は定ベクトル）に対し，$\vec{v},\vec{u}$ を基底とよんだ．したがって，π の基底は $\underline{(1,-2,1)\text{ と }(-1,1,0)}$.

(2) 法線ベクトルとは平面（と平行なベクトル）に直交するベクトルのことであり，基底の外積と平行である（2 点）．(1) より，$(1,-2,1)\times(-1,1,0)=(-1,-1,-1)$ であるから，法線ベクトルは $\underline{(1,1,1)\text{（を定数倍したベクトル）}}$ である．

(3) 法線ベクトルが $(1,1,1)$ で，点 $(1,2,3)$ を通るので，$(x-1)+(y-2)+(z-3)=0$，つまり，$\underline{x+y+z=6}$ （平面の方程式 $\langle\vec{p}-\vec{a},\vec{n}\rangle=0$ を理解しているようであれば 2 点）．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\pi_1:\ x+2y+3z=4,\quad \pi_2:\ 3x+6y+7z=10,\quad \pi_3:\ 2x+4y+kz=5$

(1) π_1 と π_2 の方程式からなる連立 1 次方程式を解く（1 点）；

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\3&6&7&10\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行基本変形}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right)\qquad\therefore\left\{\begin{array}{l}x+2y=1\\z=1\end{array}\right.$$

ここで，$y=t$ とおくと，$x=1-2t$．したがって，ℓ 上の点は $(x,y,z)=(1-2t,t,1)=(1,0,1)+t(-2,1,0)$ と表すことができる（2 点）．これは空間内の直線を表し，その方向ベクトルは $\underline{(-2,1,0)\text{（を定数倍したベクトル）}}$ である（2 点）．

(2) ℓ 上の点は $(1-2t,t,1)$ と表すことができる．π_3 が ℓ を含むとは，$(1-2t,t,1)$ を π_3 の方程式に代入した式

$$2(1-2t)+4t+k=5$$

が任意の t について成り立つときをいう（実際に，t を含む項は消える）．この式から $\underline{k=3}$ を得る．

$\boxed{4}$ 線形変換の定義を理解していれば（行列の積の計算をしていれば）各 1 点，計算結果が正しければさらに各 2 点を加点．

(1) ℓ_1 : $\vec{p}(t) = (2+t, -3+2t)$，$\ell_2$: $\vec{q}(t) = (1-3t, 3+kt)$，$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(a)

$$f_M(\vec{p}(t)) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+t \\ -3+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3t \\ -16+6t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

したがって，像は $\underline{\text{直線}}$ である．

(b)

$$f_M(\vec{q}(t)) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-3t \\ 3+kt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-(3+2k)t \\ 10+2(3+2k)t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} + (3+2k)t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

したがって，$3+2k=0$ すなわち $\underline{k = -\frac{3}{2}}$ ならば，像は t に関係なく 1 点 $(-5, 10)$ となる．

(2) $\pi : \vec{p}(t,s) = (1+t-s, 2-2t+s, 3+t)$，$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -9 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$$f_M(\vec{p}(t,s)) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -9 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+t-s \\ 2-2t+s \\ 3+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13-t+2s \\ -34+4t-8s \\ 27-3t+6s \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 13 \\ -34 \\ 27 \end{pmatrix} + (t-2s)\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

これは点 $(13, -34, 27)$ を通り，方向ベクトルが $(-1, 4, -3)$ の $\underline{\text{直線}}$ である．