第 3 章

点の変換

直交座標系を定めた平面，空間をそれぞれ $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ と書く．この章では平面や空間内の変換，つまり，写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を扱う $(n=2,3)$．特に，n 次正方行列 M とベクトル $\vec{v}$ を用いて $f(\vec{p}) = M\vec{p} + \vec{v}$ と定義されるアフィン変換の性質を理解し，拡大や縮小，回転などの変換を数学的に表現できるようになることが目標である．

以後，n と書いた場合は 2（平面の場合）または 3（空間の場合）を表すとする．また，点 P とその位置ベクトル $\vec{p}$ を同一視し，$\vec{p}$ をその成分を縦に並べて書く（$n \times 1$ 行列とみなす）．

3.1　線形変換

3.1.1　定義と性質

定義 **3.1.** n 次正方行列 M に対し，$\vec{p} \mapsto M\vec{p}$ で定義される写像を M によって生成される線形変換といい，f_M と書く（つまり，$f_M:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$f_M(\vec{p}) = M\vec{p}$）．ここで，$M\vec{p}$ は $\vec{p}$ を $n \times 1$ 行列とみなしたときの M との行列の積である．

一般に，写像 f に対し，$f(P)$ を点 P の f による像という．

例 **3.2.** 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ によって生成される $\mathbb{R}^2$ の線形変換 f_M について次の問に答えなさい．

(1) 点 $P(-2,3)$ の像 $f_M(P)$ を求めなさい．

(2) パラメーター表示 $\vec{p}(t) = (t-3, 2t+1)$ で表される直線を ℓ とする．ℓ の f_M による像がどのような図形になるか考察しなさい．

(3) 方程式 $y = 2x + 7$ で表される直線を m とする．m の f_M による像がどのような図形になるか考察しなさい．

解. (1) $f_M(P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}}$.

(2) $f_M(\vec{p}(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-3 \\ 2t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t-1 \\ 11t-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$．したがって，$\ell$ の f_M による像は，点 $(-1,-5)$ を通り，方向ベクトル $(5,11)$ の $\underline{\text{直線}}$ である．

(3) m の方程式において $x = t$ とおくと，$y = 2t+7$ である．したがって，m 上の点は $\vec{q}(t) = (t, 2t+7)$ と表すことができる．これは m のパラメーター表示である．これを f_M で変換すると $f_M(\vec{q}(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t+14 \\ 11t+28 \end{pmatrix}$ となる．ここで，$x = 5t+14$, $y = 11t+28$ とおき，t を消去すると $\underline{11x - 5y = 14}$ となる．これが m の f_M による像である直線の方程式である．

例 3.3. パラメーター表示 $\vec{p}(t) = (t-3, 2t+1)$ で表される直線を ℓ とする．行列 $N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ によって生成される $\mathbb{R}^2$ の線形変換 f_M による ℓ の像がどのような図形になるか考察しなさい．

解． (1) $f_N(\vec{p}(t)) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-3 \\ 2t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$．したがって，直線 ℓ は f_M によって $\underline{\text{点}\left(7, -\frac{3}{2}\right)\text{に移る}}$．

線形変換は次の性質を満たす．

線形変換の性質

f_M を行列 M によって生成される線形変換とする．このとき，任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ と実数 c に対して，

(1) $f_M(\vec{a} + \vec{b}) = f_M(\vec{a}) + f_M(\vec{b})$,
(2) $f_M(c\,\vec{a}) = c\,f_M(\vec{a})$.

これらの性質は行列の和とスカラー倍の線形性による．これらを用いると，例 3.2, 3.3 の問題をより一般的に考えることができる．直線上の点は $\vec{p}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$ と表されるので，これを線形変換すると，

$$f_M(\vec{p}(t)) = f_M(\vec{a} + t\vec{v}) = f_M(\vec{a}) + t f_M(\vec{v}) \tag{3.1}$$

となる．もし，$f_M(\vec{v}) \neq \vec{0}$ ならば，(3.1) の右辺は点 $f_M(\vec{a})$ を通り，方向ベクトルが $f_M(\vec{v})$ である直線を表す．しかし，$f_M(\vec{v}) = \vec{0}$ ならば，(3.1) の右辺は定点 $f_M(\vec{a})$ なので，この場合は直線は f_M によって 1 点につぶれてしまう．

定理 3.4. 直線は線形変換 f_M によって，直線，または 1 点に移される．また，平面は線形変換 f_M によって，平面，直線，または 1 点に移される．

線形変換の性質としては次の事実が本質的である．

定理 3.5. $\mathbb{R}^n$ の変換（写像）$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ と実数 c に対して

$$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}), \qquad f(c\,\vec{a}) = c\,f(\vec{a})$$

を満たすとする．このとき，f は線形変換である．つまり，$f = f_M$ となる行列 M が存在する．

Proof. 平面 $\mathbb{R}^2$ の変換 f について示す（空間の変換についても同様に示せる）．$\mathbb{R}^2$ の基本ベクトルを $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ とすると，任意の点 $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ は線形結合 $\vec{p} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2$ と表される．仮定から

$$f(\vec{p}) = f(p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2) = f(p_1\vec{e}_1) + f(p_2\vec{e}_2) = p_1 f(\vec{e}_1) + p_2 f(\vec{e}_2)$$

となる．$f(\vec{e}_i)$ も $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ の線形結合で表せるので，$f(\vec{e}_j) = a_{1j}\,\vec{e}_1 + a_{2j}\,\vec{e}_2$ となる実数 a_{ij} が定まる[*1]．このとき，

$$\begin{aligned} f(\vec{p}) =& p_1 f(\vec{e}_1) + p_2 f(\vec{e}_2) \\ =& p_1\left(a_{11}\,\vec{e}_1 + a_{21}\,\vec{e}_2\right) + p_2\left(a_{12}\,\vec{e}_1 + a_{22}\,\vec{e}_2\right) \\ =& \left(p_1 a_{11} + p_2 a_{12}\right)\vec{e}_1 + \left(p_1 a_{21} + p_2 a_{22}\right)\vec{e}_2 \end{aligned}$$

つまり，$f(\vec{p})$ を成分表示すると

$$f(\vec{p}) = \begin{pmatrix} p_1 a_{11} + p_2 a_{12} \\ p_1 a_{21} + p_2 a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

となり，f は行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ によって生成される線形変換であることがわかる． □

[*1] この数 $\{a_{ij}\}$ は座標系と f にのみ依存して決まる．