(1) 直線 l : $\vec{p}(t) = (2t-1, t+3, -2t+3)$ と π との交点を求めなさい．

(2) 直線 m : $\vec{q}(t) = (2t-1, t+3, kt+3)$ と π は交点を持たないとする．このとき，k の値を求めなさい．

解． (1) $\vec{p}(t)$ を π の式に代入すると

$$\begin{aligned} 0 =& 3(2t-1) - 5(t+3) + (-2t+3) - (-2) \\ =& -t - 13, \end{aligned}$$

したがって，$t = -13$ となる．つまり，$\vec{p}(-13) = \underline{(-27, -20, 29)}$ が ℓ と π の交点である．

(2) $\vec{q}(t)$ を π の式に代入すると

$$\begin{aligned} 0 =& 3(2t-1) - 5(t+3) + (kt+3) - (-2) \\ =& (1+k)t - 13, \end{aligned} \tag{2.9}$$

となる．t の係数 $(1+k)$ が 0 でなければ，(1) の手順で交点が求まる．求める条件は，交点を持たない場合なので $1+k=0$，つまり，$k=-1$ である．実際，$k=-1$ ならば，(2.9) より $-13=0$ となり，これは矛盾する．

2.4　2 次曲線と 2 次曲面

第 1 節と第 2 節では，1 次方程式を満たす点のなす図形について述べた．ここでは 2 次方程式によって表される図形について簡単に紹介する．

2.4.1　2 次曲線

2 次方程式

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

（ただし，a_{ij}, b_k, c は定数）を満たす平面内の点 (x, y) 全体からなる図形を **2** 次曲線という．

例 2.8. 点 C と正の数 r に対し，$\|\overrightarrow{CP}\| = r$ を満たす点 P の集まりを，C を中心とし，半径が r の円という．特に，平面における円を円周，空間における円を球面という．このとき，円周が 2 次曲線であることを示しなさい．

解． $C(c_1, c_2)$，$P(x, y)$ とおくと，$\overrightarrow{CP} = (x-c_1, y-c_2)$ となる．$\|\overrightarrow{CP}\|^2 = r^2$ を計算すると，

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = r^2$$

となる．したがって，円は 2 次曲線である．

2 次曲線

$$6x^2 - xy - 2y^2 - 5x - 6y - 4 = 0 \tag{2.10}$$

は

$$(3x - 2y - 4)(2x + y + 1) = 0$$

と因数分解できる．したがって，点 $P(x, y)$ が 2 次曲線 (2.10) 上の点であることと，P が 2 つの直線 $3x - 2y - 4 = 0$, $2x + y + 1 = 0$ のいずれかの点であることは同値である．このように 1 次方程式の積に因数分解できる 2 次曲線を可約 **2** 次曲線といい，可約でない 2 次曲線を既約 **2** 次曲線という．

既約な 2 次曲線は本質的には次の 3 つ[*2]しかない．

楕円

方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a, b > 0) \tag{2.11}$$

で与えられる 2 次曲線を楕円という（図 2.8 左）．

双曲線

方程式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a, b > 0) \tag{2.12}$$

で与えられる 2 次曲線を双曲線という（図 2.8 右）．

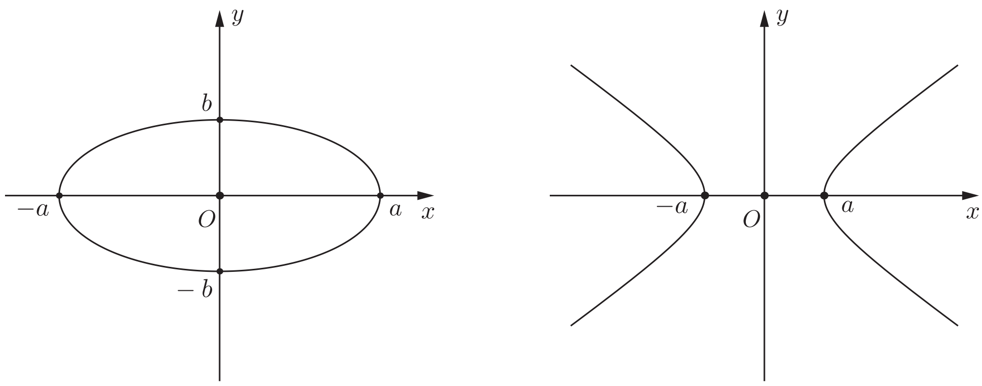

図 2.8　楕円と双曲線

放物線

方程式

$$y^2 = 4px \qquad (p > 0) \tag{2.13}$$

で与えられる 2 次曲線を放物線という（図 2.9）．

[*2] 例えば，$x^2 + y^2 = 0$ も $x^2 + y^2 = -1$ も 2 次曲線だが，前者を満たすのは原点 $(x, y) = (0, 0)$ のみだし，後者を満たす実数の組 (x, y) は存在しない．このような奇妙な場合を除外して，既約な 2 次曲線は 3 種類しかない．

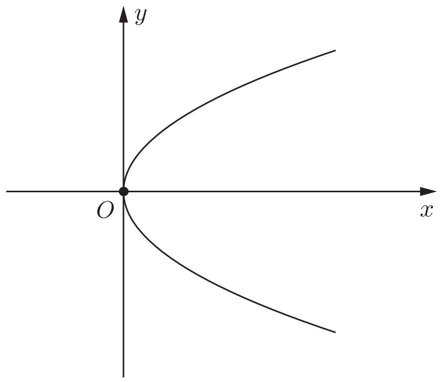

図 2.9　放物線

2.4.2　2 次曲面

2 次方程式

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

（ただし，a_{ij}, b_k, c は定数）を満たす空間内の点 (x, y, z) からなる図形を **2 次曲面**という．1 次多項式の積に因数分解できる 2 次曲面を**可約 2 次曲面**といい，可約でない 2 次曲面を**既約 2 次曲面**という．

（つづく. . . ）

第 3 章

点の変換

直交座標系を定めた平面，空間をそれぞれ $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ と書く．この章では平面や空間内の変換，つまり，写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を扱う $(n=2,3)$．特に，n 次正方行列 M とベクトル $\vec{v}$ を用いて $f(\vec{p}) = M\vec{p} + \vec{v}$ と定義されるアフィン変換の性質を理解し，拡大や縮小，回転などの変換を数学的に表現できるようになることが目標である．

以後，n と書いた場合は 2（平面の場合）または 3（空間の場合）を表すとする．また，点 P とその位置ベクトル $\vec{p}$ を同一視し，$\vec{p}$ をその成分を縦に並べて書く（$n\times 1$ 行列とみなす）．

3.1　線形変換

3.1.1　定義と性質

定義 **3.1.** n 次正方行列 M に対し，$\vec{p} \mapsto M\vec{p}$ で定義される写像を M によって生成される線形変換といい，f_M と書く（つまり，$f_M:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$f_M(\vec{p}) = M\vec{p}$）．ここで，$M\vec{p}$ は $\vec{p}$ を $n\times 1$ 行列とみなしたときの M との行列の積である．

一般に，写像 f に対し，$f(P)$ を点 P の f による像という．

例 **3.2.** 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ によって生成される $\mathbb{R}^2$ の線形変換 f_M について次の問に答えなさい．

(1) 点 $P(-2,3)$ の像 $f_M(P)$ を求めなさい．
(2) パラメーター表示 $\vec{p}(t) = (t-3, 2t+1)$ で表される直線を ℓ とする．ℓ の f_M による像がどのような図形になるか考察しなさい．
(3) 方程式 $y = 2x+7$ で表される直線を m とする．m の f_M による像がどのような図形になるか考察しなさい．

3.1.2　主な線形変換

恒等変換

拡大と縮小

せん断

回転

鏡映

直交変換

3.2　平行移動

3.3　合成変換と逆変換

3.3.1　合成変換

3.3.2　逆変換

3.3.3　アフィン変換

3.4　線形変換の固有値と固有ベクトル