となる．したがって，解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．これは点 $(-3, 4, 0)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (-2, 1, 1)$ の直線である．

平面と直線の交点

空間内の直線と平面の位置関係については，(i) 1 点で交わる場合（図 2.7 左），(ii) 直線と平面が平行で交わらない場合，(iii) 平面に直線が完全に含まれる場合（図 2.7 右）の 3 つの場合が考えられる．

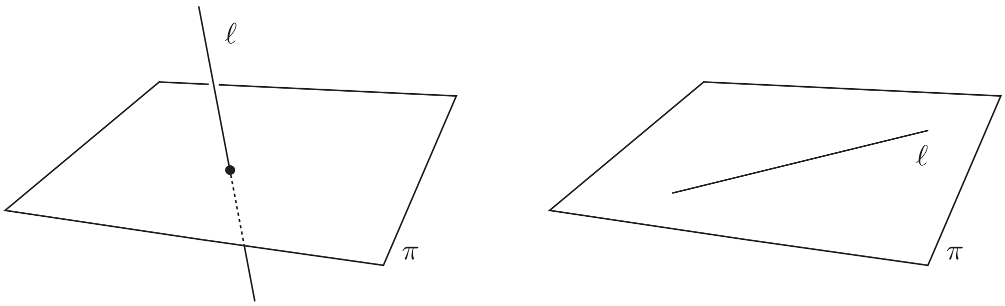

図 2.7　空間内の平面と直線

平面 π の方程式を $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ とし，ℓ を点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ の直線とする．つまり，ℓ はパラメーター表示 $\vec{p}(t) = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, a_3 + tv_3)$ で表される直線である．

$\vec{p}(t_0) = (a_1 + t_0v_1, a_2 + t_0v_2, a_3 + t_0v_3)$ が π 上の点であると仮定する．このとき，

$$(\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 - \delta) + t_0(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) = 0 \tag{2.8}$$

が成り立つ．もし，$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \neq 0$ ならば，(2.8) より

$$t_0 = -\frac{\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 - \delta}{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3}$$

となる．

一方，$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$[*1] のとき，(2.8) が成り立つためには $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 - \delta = 0$ でなくてはならない．この場合は，任意の t_0 に対して (2.8) が成り立つ．つまり，ℓ は π 内の直線である．

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ かつ $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 - \delta \neq 0$ ならば，(2.8) を満たす t_0 は存在しない．つまり，ℓ と π との交点は存在しない．

例 **2.7.** π を方程式 $3x - 5y + z = -2$ で表される空間内の平面とする．このとき，次の問に答えなさい．

[*1] これは ℓ の方向ベクトルと，π の法線ベクトルが直交することを意味する．

(1) 直線 l : $\vec{p}(t) = (2t-1, t+3, -2t+3)$ と π との交点を求めなさい．

(2) 直線 m : $\vec{q}(t) = (2t-1, t+3, kt+3)$ と π は交点を持たないとする．このとき，k の値を求めなさい．

解． (1) $\vec{p}(t)$ を π の式に代入すると

$$\begin{aligned} 0 =& 3(2t-1) - 5(t+3) + (-2t+3) - (-2) \\ =& -t - 13, \end{aligned}$$

したがって，$t = -13$ となる．つまり，$\vec{p}(-13) = \underline{(-27, -20, 29)}$ が ℓ と π の交点である．

(2) $\vec{q}(t)$ を π の式に代入すると

$$\begin{aligned} 0 =& 3(2t-1) - 5(t+3) + (kt+3) - (-2) \\ =& (1+k)t - 13, \end{aligned} \tag{2.9}$$

となる．t の係数 $(1+k)$ が 0 でなければ，(1) の手順で交点が求まる．求める条件は，交点を持たない場合なので $1+k=0$，つまり，$k=-1$ である．実際，$k=-1$ ならば，(2.9) より $-13=0$ となり，これは矛盾する．

2.4　2 次曲線と 2 次曲面

第 1 節と第 2 節では，1 次方程式を満たす点のなす図形について述べた．ここでは 2 次方程式によって表される図形について簡単に紹介する．

2.4.1　2 次曲線

2 次方程式

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

（ただし，a_{ij}, b_k, c は定数）を満たす平面内の点 (x, y) からなる図形を **2** 次曲線という．

例 2.8. 点 C と正の数 r に対し，$\|\overrightarrow{CP}\| = r$ を満たす点 P の集まりを C を中心とし，半径が r の円という．特に，考えているところが平面のときは円周，空間のときは球面という．このとき，円周が 2 次曲線であることを示しなさい．

解． $C(c_1, c_2)$，$P(x, y)$ とおくと，$\overrightarrow{CP} = (x-c_1, y-c_2)$ となる．$\|\overrightarrow{CP}\|^2 = r^2$ を計算すると，

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = r^2$$

となる．したがって，円は 2 次曲線である．

2.4.2　2 次曲面