平面の方程式 (2.5) は，直線の方程式を導いた方法（例題 2.3 を参照）と同様，パラメーター表示の式からパラメーターを消去することによって導出することもできる．

例題 **2.4(2)** の別解．(2.7) の右辺を (x, y, z) とおく．つまり，

$$x = 1 + t + 3s, \quad y = 2 - t - 6s, \quad z = 3 - t - 4s.$$

上の第 1 式と第 2 式を（x, y, z を定数と見なして）t, s に関する連立 1 次方程式と思って解くと，$t = 2x + y - 4,\ s = \frac{1}{3}(3 - x - y)$ となる．これを第 3 式に代入することにより，$\underline{2x - y + 3z = 9}$ を得る．

2.3　図形の交わり

平面と平面の交わり

空間内の 2 つの異なる平面を考える．図 2.6 左のように，平行（つまり，法線ベクトルが平行）ならば 2 つの平面が交わることはないが，一般的には図 2.6 右のように交わりを持ち，交点の集まりは直線となる（これを交線とよぶ）．

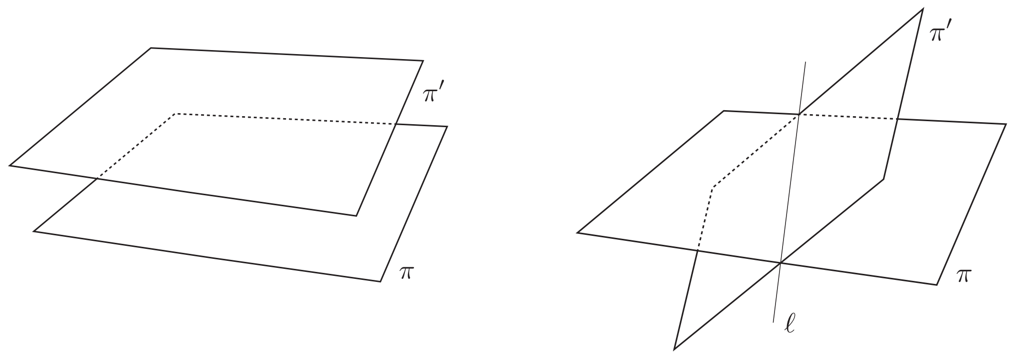

図 2.6　空間内の 2 つの平面

与えられた 2 つの平面 $\pi_i\ :\ \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z = \delta_i\ (i = 1, 2)$ に対し，交線のパラメーター表示は求めたい．交線上の点 (x, y, z) は，π_1，π_2 両方の方程式を同時に満たす．つまり，連立 1 次方程式の解が交線を表す．

例 **2.6.** 2 の平面 $2x - y + 5z = -10$ と $3x + 2y + 4z = -1$ の交線のパラメーター表示を求めなさい．

解． 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = -10 \\ 3x + 2y + 4z = -1 \end{cases}$$

の解を求める．拡大係数行列を行基本変形によって簡約階段行列に変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & -10 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

となる．したがって，解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．これは点 $(-3, 4, 0)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (-2, 1, 1)$ の直線である．

平面と直線の交点

空間内の直線と平面の位置関係については，(i) 1 点で交わる場合（図 2.7 左），(ii) 直線と平面が平行で交わらない場合，(iii) 平面に直線が完全に含まれる場合（図 2.7 右）の 3 つの場合が考えられる．

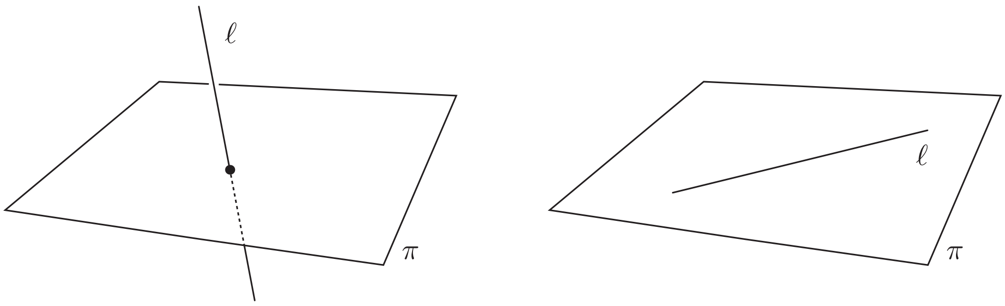

図 2.7　空間内の平面と直線

2.4　2 次曲線と 2 次曲面