つまり，

$$x = a_1 + tv_1, \quad y = a_2 + tv_2$$

となる．この 2 式からパラメーター t を消去すると

$$v_2 x - v_1 y = a_1 v_2 - a_2 v_1$$

となる．つまり，平面内の直線上の点 $P(x, y)$ は x, y に関する 1 次方程式として表される．

平面内の直線の方程式

平面内の直線上の点 $P(x, y)$ は

$$\alpha x + \beta y = \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は定数})$$

を満たす．

例 **2.3.** 平面上の 2 点 $(1, 2)$，$(-3, 5)$ を通る直線を ℓ とする．ℓ 上の点を (x, y) とするとき，x と y が満たす方程式を求めなさい．

解. 例題 2.1 より，ℓ 上の点は $(x, y) = (4t+1, -3t+2)$ と表すことができる．$x = 4t+1$，$y = -3t+2$ から t を消去すると $\underline{3x + 4y = 11}$ を得る．

2.1.3　空間内の直線の方程式

平面内の直線の方程式が 1 次方程式 $\alpha x + \beta y = \gamma$ と表せることから，空間内の直線も同様に 1 次方程式 $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ と表せると思うかもしれないが，この考えは間違いである．

点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ である直線上の点はパラメーター t を用いて $(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, a_3 + tv_3)$ と表すことができる．$(x, y, z) = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, a_3 + tv_3)$ とおいて，3 式 $x = a_1 + tv_1$，$y = a_2 + tv_2$，$z = a_3 + tv_3$ をそれぞれ形式的に $t = \cdots$ と式変形すると

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{x - a_2}{v_2} = \frac{x - a_3}{v_3} \ (= t) \tag{2.3}$$

となる．これが空間内の直線の方程式である．この式の意味は次々節で述べる．

2.2　空間内の平面

2.2.1　平面のパラメーター表示

異なる 2 つ点に対し，それらを通る直線がただ一つ定まるように，空間内の 3 点（ただし，1 直線上にはないとする）を決めると，それらを通る平面がただ一つ定まる（図 2.3 左）．

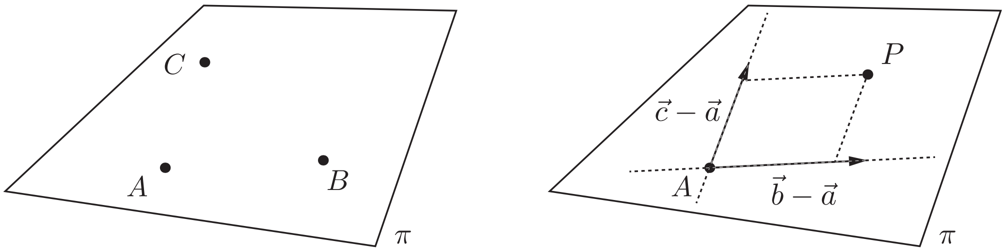

図 2.3　3 点 A, B, C を通る平面

空間内の 3 点 A, B, C を通る平面を π とおく．この平面上の点 P を A, B, C の座標を用いて表すことを考える．A を平面 π の原点，B, C を単位点と思うと，π に（斜行）座標系が定まり，π 上の任意の点 P に対して座標 (t, s) が定まる（図 2.3 右）．つまり，$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 (t, s) が定まる．点 A, B, C, P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ とすると，

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a}) \tag{2.4}$$

となる．これを平面 π のパラメーター表示（または媒介変数表示）といい，t, s をパラメーター（または媒介変数）という．(2.4) において，パラメーターが t, s であることを明示する場合は，$\vec{p}(t, s) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$ と表記する．$\vec{p}(t, s)$ を位置ベクトルとする点を $P_{(t,s)}$ とすると，t, s が変化することによって $P_{(t,s)}$ は π 全体を動く．$0 \leq t, s \leq 1$ の範囲を動くとき，線分 AB, AC を 2 辺とする平行四辺形を表す．また，$t, s > 0$ かつ $0 \leq t + s \leq 1$ の範囲を動くとき，三角形 ABC を表す．

(2.4) において，$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{u} = \vec{c} - \vec{a}$ は平面 π の基底となる．$\vec{p}(t, s) = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{u}$ で与えられる式は，点 A を通り，$\{\vec{v}, \vec{u}\}$ を基底とする平面を表す（図 2.2）．

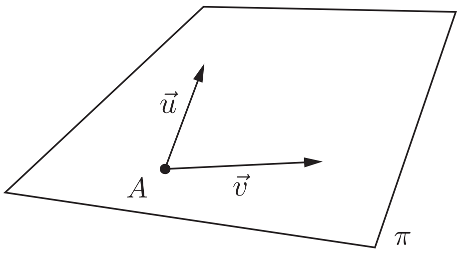

図 2.4　平面の基底

空間内の平面のパラメーター表示

(1) 3 点 A, B, C を通る平面上の点 P は

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$$

(2) 点 A を通り，$\{\vec{v}, \vec{u}\}$ を基底とする平面上の点 P は

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{u}$$

と表すことができる．

2.2.2　平面の方程式

前小節では，点 A を通り，$\vec{v}, \vec{u}$ を基底とする平面 π 上の点を P とすると，$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} + s\vec{u}$ と書けることを述べた．これは，$\vec{v}$ と $\vec{u}$ の外積 $\vec{v} \times \vec{u}$ が $\overrightarrow{AP}$ と直交することと同値である．つまり，$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u}$ とおくとき，P が平面 π 上の点あるための必要十分条件は，P の位置ベクトル $\vec{p}$ が

$$\langle \vec{p} - \vec{a}, \vec{n} \rangle = 0 \tag{2.5}$$

を満たすことである．このように平面と直交するベクトル $\vec{n}$ を平面の法線ベクトルという．

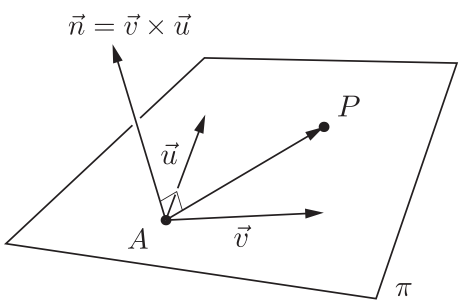

図 2.5　平面の法線ベクトル

では，(2.5) をベクトルの成分を用いて表してみよう．$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$，$\vec{p} = (x, y, z)$ とすると，

$$\begin{aligned} 0 =& \langle \vec{p} - \vec{a}, \vec{n} \rangle \\ =& \alpha(x - a_1) + \beta(y - a_2) + \gamma(z - a_3) = 0 \\ =& \alpha x + \beta y + \gamma z - (\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3) \end{aligned}$$

となる．$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$ も定数だから，$\delta = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$ とおくと，

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \tag{2.6}$$

となる．これが平面の方程式である．x, y, z の係数が法線ベクトルの成分となっていることに注意せよ．

空間内の平面の方程式

(1) 点 A を通り，法線ベクトルが $\vec{n}$ の平面上の点 P は

$$\langle \vec{p}-\vec{a}, \vec{n}\rangle = 0$$

を満たす．

(2) x, y, z に関する 1 次方程式

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

を満たす点 (x, y, z) は空間内の平面上の点である（法線ベクトルは (α, β, γ) と平行である）．

例 **2.4.** 3 点 $(1, 2, 3)$，$(2, 1, 2)$，$(4, -4, -1)$ を通る平面を π とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) π のパラメーター表示を求めなさい．
(2) π 上の点を (x, y, z) とするとき，x, y, z が満たす方程式を求めなさい．

解. (1) π の基底は

$$\begin{aligned}\vec{v} =&(2, 1, 2) - (1, 2, 3) = (1, -1, -1),\\ \vec{u} =&(4, -4, -1) - (1, 2, 3) = (3, -6, -4)\end{aligned}$$

である．したがって，π のパラメーター表示は

$$\begin{aligned}\vec{p}(t, s) =&(1, 2, 3) + t(1, -1, -1) + s(3, -6, -4)\\ =&\underline{(1 + t + 3s,\ 2 - t - 6s,\ 3 - t - 4s)}\end{aligned} \tag{2.7}$$

となる．

(2) π の法線ベクトルは $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u} = (-2, 1, -3)$ である．$\vec{p} = (x, y, z)$，$\vec{a} = (1, 2, 3)$ とおくと，π の方程式は

$$\begin{aligned}0 =&\langle \vec{p}-\vec{a}, \vec{n}\rangle\\ =&-2(x-1) + (y-2) + (-3)(z-3)\\ =&-2x + y - 3z + 9,\end{aligned}$$

すなわち，$\underline{2x - y + 3z = 9}$ である．

例 **2.5.** 原点を通る平面 $2x - y + 3z = 0$ を π' とする．点 $(1, 2, 3)$ を通り，π と平行な（つまり，法線ベクトルが同じ）平面 π の方程式を求めなさい．

解. 平面 π の法線ベクトルの成分は $2x - y + 3z = 0$ の係数なので，$\vec{n} = (2, -1, 3)$ である．求める平面は $(1, 2, 3)$ を通るので，平面のベクトル方程式 2.5 より，$2(x-1) - (y-2) + 3(z-3) = 0$，すなわち $\underline{2x - y + 3z = 9}$ である．