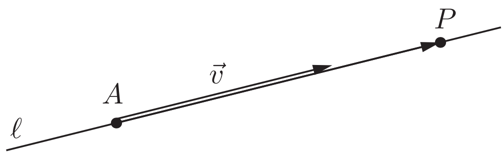

図 2.2　直線の方向ベクトル

直線のパラメーター表示

(1) 2 点 A, B を通る直線上の点 P は

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$$

(2) 点 A を通り，$\vec{v}$ に平行な（方向ベクトルが $\vec{v}$ の）直線上の点 P は

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{v}$$

と表すことができる．

例 **2.1.** 平面上の 2 点 $(1, 2)$, $(-3, 5)$ を通る直線を ℓ とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) ℓ のパラメーター表示を求めなさい．
(2) 点 $Q(5, -1)$ が ℓ 上の点であるか否か判定しなさい．

解. (1) ℓ の方向ベクトルの成分は $(1, 2) - (-3, 5) = (4, -3)$ である．点 $(1, 2)$ を通るので，ℓ 上の点はパラメーター t を用いて $(1, 2) + t(4, -3) = \underline{(4t + 1, -3t + 2)}$ と表すことができる．

(2) Q が ℓ 上の点ならば，$(4t + 1, -3t + 2) = (5, -1)$ を満たす実数 t が存在する．つまり，2 式 $4t + 1 = 5$, $-3t + 2 = -1$ を同時に満たす t が存在する．1 つ目の式から $t = 1$ を得るが，これは 2 つ目の式 $-3t + 2 = -1$ も満たす．したがって，$\underline{Q \text{ は } \ell \text{ 上の点}}$である．

注意 **2.2.** 直線のパラメーター表示は一意的に定まるものではない（表し方は無数にある）．

2.1.2　平面内の直線の方程式

パラメーター表示 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{v}$ で与えられる平面内の直線上の点を $P(x, y)$ とするとき，x, y がどのような方程式を満たすのか考える．

$A(a_1, a_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ とすると，

$$\vec{p} = (x, y) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2) = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2)$$

つまり，

$$x = a_1 + tv_1, \quad y = a_2 + tv_2$$

となる．この 2 式からパラメーター t を消去すると

$$v_2 x - v_1 y = a_1 v_2 - a_2 v_1$$

となる．つまり，平面内の直線上の点 $P(x, y)$ は x, y に関する 1 次方程式として表される．

平面内の直線の方程式

平面内の直線上の点 $P(x, y)$ は

$$\alpha x + \beta y = \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は定数})$$

を満たす．

例 **2.3.** 平面上の 2 点 $(1, 2)$，$(-3, 5)$ を通る直線を ℓ とする．ℓ 上の点を (x, y) とするとき，x と y が満たす方程式を求めなさい．

解. 例題 2.1 より，ℓ 上の点は $(x, y) = (4t + 1, -3t + 2)$ と表すことができる．$x = 4t + 1$，$y = -3t + 2$ から t を消去すると $\underline{3x + 4y = 11}$ を得る．

2.1.3　空間内の直線の方程式

平面内の直線の方程式が 1 次方程式 $\alpha x + \beta y = \gamma$ と表せることから，空間内の直線も同様に 1 次方程式 $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ と表せると思うかもしれないが，この考えは間違いである．

点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ である直線上の点はパラメーター t を用いて $(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, a_3 + tv_3)$ と表すことができる．$(x, y, z) = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, a_3 + tv_3)$ とおいて，3 式 $x = a_1 + tv_1$，$y = a_2 + tv_2$，$z = a_3 + tv_3$ をそれぞれ形式的に $t = \cdots$ と式変形すると

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{x - a_2}{v_2} = \frac{x - a_3}{v_3} \ (= t) \tag{2.3}$$

となる．これが空間内の直線の方程式である．この式の意味は次々節で述べる．

2.2　空間内の平面

2.2.1　平面のパラメーター表示

2.2.2　平面の方程式

2.3　図形の交わり

平面達の交点の集合

平面の直線の交点

2.4　2 次曲線と 2 次曲面