であるから，$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$ ならば，$\{\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\}$ は右手系の向きを持つ．これは，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ に向かって回転したとき[*8]，右ねじの進む方向が $\vec{a}\times\vec{b}$ であることを意味する．

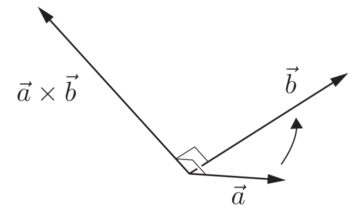

図 1.18　外積の向き

1.3　基底と座標系

基底とは

定義 1.7. ベクトル $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$ に対し，それらをスカラー倍した和のベクトル

$$k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+\ldots+k_r\vec{v}_r$$

を $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$ の線形結合という．

ベクトルの成分表示 $\vec{p}=(x_1,x_2,x_3)$ とは，直交座標系の基本ベクトル $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ を用いて，$\vec{p}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ と表せることと同値であった．つまり，ベクトルの成分とは「基本ベクトルの線形結合で表したときの係数」のことである．これは「任意のベクトルは，基本ベクトルの線形結合として表すことができる」ことを意味する．

定義 1.8. 任意の平面ベクトルが，$\vec{v}_1,\vec{v}_2$ の線形結合で表せるとき，$\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ を平面の基底という[*9]．特に $\langle\vec{v}_i,\vec{v}_j\rangle=\delta_{ij}$ を満たす基底を正規直交基底という．

定義 1.9. 任意の空間ベクトルが，$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ の線形結合で表せるとき，$\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ を空間の基底という．特に $\langle\vec{v}_i,\vec{v}_j\rangle=\delta_{ij}$ を満たす基底を正規直交基底という．

基本ベクトルは座標系から自然に定まる正規直交基底である．

[*8] $\vec{a}$ から $\vec{b}$ への回転角が π より小さくなるように回転する．

[*9] 基底を厳密に定義するには，線形独立という概念が必要である．ベクトルの組 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$ が線形独立とは，

$$k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+\ldots+k_r\vec{v}_r=\vec{0}$$

を満たすスカラーが $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ のみのときをいう．線形独立でないベクトルの組を線形従属であるという．$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$ が線形従属ならば，この中の少なくとも 1 つのベクトルは他のベクトルの線形結合で表すことができる．
平面（または空間）の基底とは，線形独立かつ任意の平面（空間）ベクトルを線形結合によって表すことのできるベクトルの組 $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r\}$ のことである．実際には，2 つの（3 つの）線形独立なベクトルは平面（空間）の基底となることがわかる．

基底の性質

基底とはどのようなベクトルの組として特徴付けることができるだろうか．たとえば，与えられたベクトルの組が基底をなすか否かを判定する手段はあるだろうか？これについては次の定理が成り立つ．

定理 1.10. ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ が平面の基底であるための必要十分条件は

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

定理 1.11. ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ が空間の基底であるための必要十分条件は

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

ここでは，空間の場合（定理 1.11）について説明する．$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ が空間の基底とは，「どんなベクトル $\vec{p}$ も $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の線形結合として表すことができる」こと，すなわち「任意の $\vec{p}$ に対し，$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ を満たす実数 x, y, z が存在する」ことだった．これは，任意の (p_1, p_2, p_3) に対し，連立1次方程式

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = p_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = p_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = p_3 \end{cases} \tag{1.7}$$

が解をもつことを意味する．ここで，

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

とおくと[*10]，連立方程式 (1.7) は $M\vec{x} = \vec{p}$ と書ける．定理の条件 $\det(M) \neq 0$ は，「M が正則行列[*11]である」ことと同値であるから，次の命題を示せばよいことがわかる．

命題 1.12. 任意の $\vec{p}$ に対し，連立1次方程式 $M\vec{x} = \vec{p}$ が解をもつための必要十分条件は，M が正則行列であることである．

Proof. M が正則行列ならば，$M\vec{x} = \vec{p}$ の両辺に左から M^{-1} を乗ずることにより，解は $\vec{x} = M^{-1}\vec{p}$ となる．

しかし，M が正則行列でないならば $\mathrm{rank}(M) < 3$ であるが，$\vec{p}$ によっては $\mathrm{rank}(M) < \mathrm{rank}(M\ \vec{p})$ となることがある[*12]．したがって，この場合は $M\vec{x} = \vec{p}$ は解を持たない．　□

[*10] 以後，ベクトルを成分表示するとき，成分を縦に並べて表記することもあることに注意せよ．

[*11] M が正則行列とは，逆行列 M^{-1} が存在することである．3次正方行列 M が正則であること，$\det(M) \neq 0$，$\mathrm{rank}(M) = 3$ は互いに同値な条件である．

[*12] 連立1次方程式 $M\vec{x} = \vec{p}$ の解が存在するための条件は，係数行列 M と拡大係数行列 $(M\ \vec{p})$ の階数が等しくなること $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(M\ \vec{p})$ である．

例 **1.13.** 平面ベクトル $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(-2,1)$ について次の問に答えなさい．

(1) $\{\vec{a},\ \vec{b}\}$ が平面の基底であることを示しなさい．
(2) $\vec{p}=(1,3)$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ の線形結合で表しなさい．

解． (1) $\det\left(\vec{a}\ \vec{b}\right)=\det\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=1-(-4)=5\neq 0$．したがって，$\{\vec{a},\ \vec{b}\}$ は平面の基底である．

(2) 求めるものは $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ を満たす数 x,y である．これは

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\quad \text{つまり，連立 1 次方程式}\quad \begin{cases}x-2y=1\\2x+y=3\end{cases}$$

を解くことに他ならない．逆行列を用いてこれを解くと，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$$

となる．したがって，$\underline{\vec{p}=\frac{7}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}}$ となることがわかる．

正規直交基底と直交座標系

（直交）座標系とは，原点 O と単位点 E_i *13（平面の場合は 2 つ，空間の場合は 3 つ）によって定まり，単位点の位置ベクトルとして基本ベクトル $\vec{e}_i$ が定まる．空間の場合は，任意のベクトル $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ に対し，$\vec{p}=p_1\vec{e}_1+p_2\vec{e}_2+p_3\vec{e}_3$ となること，さらに $\langle\vec{e}_i,\vec{e}_j\rangle=\delta_{ij}$ を満たすことから，$\{\vec{e}_i\}$ は正規直交基底である．

逆に，正規直交基底 $\{\vec{v}_i\}$ と点 O' が与えられれば，同様の（逆の）手順で直交座標系が定まる．つまり，どんな点 Q に対しも，$\vec{q}=\overrightarrow{O'Q}$ は $\vec{v}_i$ の線形結合 $\vec{q}=q_1\vec{v}_1+q_2\vec{v}_2+\cdots$ で表せるので，その係数 $q_1,q_2,\ldots$ を Q の座標と定義すればよい．

以後（特に，第 4 章の「座標変換」）では，「（直交）座標系とは 1 点と（正規直交）基底から定まるもの」と考える．

*13 単位点が決まれば，原点と単位点を通る数直線（座標軸）が決まる．