1.2.5　空間ベクトルの外積

定義と性質

内積は 2 つのベクトルに対して実数を対応させる演算だったが，本小節で扱う外積は 2 つの空間ベクトルに対して空間ベクトルを対応させる演算である．

定義 1.5. 直交座標系を定めた空間のベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} =&(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)\\
=&\left(\det\begin{pmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{pmatrix},\ \det\begin{pmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{pmatrix},\ \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積とよぶ．

座標空間の基本ベクトル $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ を形式的にスカラーとみなすと，$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ と $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ の外積は

$$
\vec{a}\times\vec{b}=\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}
\tag{1.4}
$$

と表すこともできる．この形式的な表記は次の外積の性質を理解するのに有用である．

空間ベクトルの外積の性質

ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ と実数 t について，以下が成り立つ．

(ep-1) $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$.（交代性）
(ep-2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.（和に関する線形性）
(ep-3) $(t\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(t\vec{b})=t(\vec{a}\times\vec{b})$.（スカラー倍に関する線形性）
(ep-4) $\langle\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}\rangle=0$.

上記の性質はベクトルを成分表示して右辺と左辺を計算し，両者が等しくなることを示せばよい．しかし，外積の形式的表記 (1.4) を用いると行列式の性質から直ちに示すことができる．(ep-1) は「任意の 2 つの行，または列を入れ替えると行列式の値は (-1) 倍される」ことに，(ep-2) (ep-3) は行列式の行または列に関する線形性による．(ep-4) については，$\langle\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}\rangle$ を計算してみると

$$
\begin{aligned}
\langle\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}\rangle =&a_1\det\begin{pmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{pmatrix}+a_2\det\begin{pmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{pmatrix}+a_3\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\\
=&\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となり，「ある 2 つの行，または列が同じであれば，その行列の行列式は 0 である」ことから，0 となることがわかる．一般に $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ に

対し，

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

が成り立つ．これを空間ベクトルの **3 重積**という．行列式の性質から，3 重積が次の等式を満たすことが直ちにわかる;

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \times \vec{a} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle. \tag{1.6}$$

外積のノルムと向き

外積の性質 (ep-4) は「外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交するベクトルである」ことを意味する．したがって，ノルムと向きがわかれば，外積の完全な特徴付けが得られる．

外積のノルムについては次の事実が成り立つ．

定理 1.6. 空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の外積のノルム $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい．

Proof. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする三角形の面積の 2 倍だから (1.2) より，$\sqrt{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$ に等しい．この式にベクトルの成分を代入して計算したものと，外積の定義 (1.3) からノルムを計算した式とが等しいことを示せばよい (計算は省略する)．　□

外積の向きを議論する前に，「(順番付き) 3 つの空間ベクトルの向き」という概念を定義する．まず，空間の直交座標系を与える 3 つの基本ベクトル $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ をこの順番で「右手系」となるように定める．これは右手の親指，人差し指，中指をそれぞれが互いに直交するようにまっすぐ伸ばしたとき，$\vec{e}_1$ を親指，$\vec{e}_2$ を人差し指，$\vec{e}_3$ を中指の向きとなるようにすることである．このような座標系において，3 つのベクトル $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ が右手系で

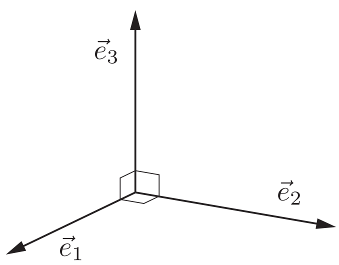

図 1.17　「右手系」の基本ベクトル

あるとは，3 重積 $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$ が正であることと定義する．

零ベクトルでない 2 つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ の 3 重積は

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 \geq 0$$

であるから，$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ ならば，$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ は右手系の向きを持つ．これは，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ に向かって回転したとき*8，右ねじの進む方向が $\vec{a} \times \vec{b}$ であることを意味する．

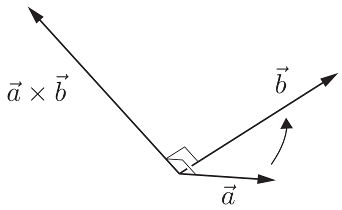

図 1.18　外積の向き

1.3　基底と座標系

*8 $\vec{a}$ から $\vec{b}$ への回転角が π より小さくなるように回転する．