(ip-1) は内積の定義式 (1.1) から明らかである．(ip-3) もノルムの性質 (n-1) から，(ip-4) は $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であることから明らかである．

図 1.16 左の場合について，(ip-2) を証明しよう．$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ と

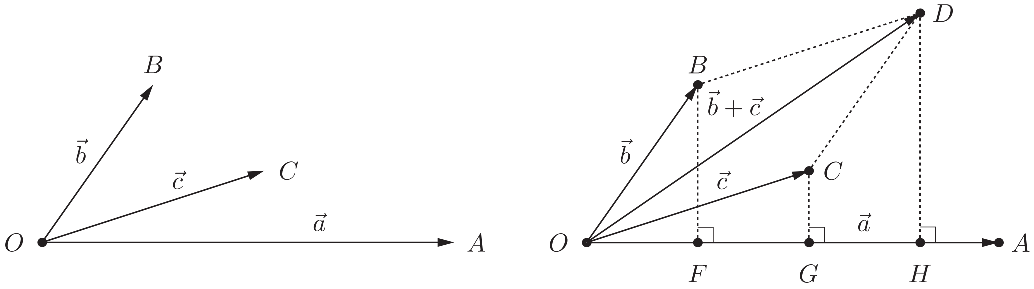

図 1.16　内積の和に関する線形性の証明

し，$\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{OD}$ とする．また，点 B, C, D から線分 OA に下ろした垂線の足をそれぞれ F, G, H とする（図 1.16 右）．このとき，内積の幾何的解釈（p.13）により，$\langle \vec{a}, \vec{b}+\vec{c} \rangle = |OA|\,|OH|$ である．同様に $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |OA|\,|OF|$，$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = |OA|\,|OG|$．また，$\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ より $|OF| = |GH|$ が成り立ち，4 点 O, F, G, H が一直線上にあるので，$|OG| + |GH| = |OH|$ である．以上のことから，

$$\begin{aligned}
\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle =& |OA|\,|OF| + |OA|\,|OG| \\
=& |OA|\,(|OF| + |OG|) \\
=& |OA|\,(|GH| + |OG|) \\
=& |OA|\,|OH| = \langle \vec{a}, \vec{b}+\vec{c} \rangle
\end{aligned}$$

となる．

三角不等式の証明

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し，$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2$ を計算する．内積の線形性 (ip-2) と内積の評価式 (ip-4) より，

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 =& \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} \rangle \\
=& \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\
=& \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2 \\
\leq& \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2.
\end{aligned}$$

$\|\vec{a}+\vec{b}\| \geq 0$ より，$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ を得る．

内積の成分表示

平面ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ の内積 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ が，成分を用いてどのように表わされるか調べる．ベクトルの成分表示の定義から，$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$ と書ける．ここで，$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ はその定義より，それぞれノルムが 1 でなす角は $\frac{\pi}{2}$ であるから，

$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ となる．ここで，δ_{ij} はクロネッカーの $\boldsymbol{\delta}$ とよばれ，

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義される記号である．このとき，内積の線形性 (ip-2)(ip-3) より，

$$\begin{aligned}
\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =& \langle a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \rangle \\
=& \langle a_1\vec{e}_1, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \rangle + \langle a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \rangle \\
=& \langle a_1\vec{e}_1, b_1\vec{e}_1 \rangle + \langle a_1\vec{e}_1, b_2\vec{e}_2 \rangle + \langle a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1 \rangle + \langle a_2\vec{e}_2, b_2\vec{e}_2 \rangle \\
=& a_1b_1\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + a_1b_2\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle + a_2b_1\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle + a_2b_2\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle \\
=& a_1b_1 + a_2b_2
\end{aligned}$$

を得る．

内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の成分表示

(1) 平面ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ に対し，

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2.$$

(2) 空間ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し，

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

三角形の面積と内積

零ベクトルでないベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し，$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする．このとき，$\triangle OAB$ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2} \tag{1.2}$$

に等しいことを示そう．

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\triangle OAB$ の面積は $\frac{1}{2}|OA|\,|OB|\,\sin\theta$ と書ける．$0 \leq \theta \leq \pi$ より，$\sin\theta \geq 0$ であるから，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|OA|\,|OB|\,\sin\theta =& \frac{1}{2}\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\
=& \frac{1}{2}\sqrt{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2\cos^2\theta} \\
=& \frac{1}{2}\sqrt{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - \left(\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\cos\theta\right)^2} \\
=& \frac{1}{2}\sqrt{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}
\end{aligned}$$

となることがわかる．

1.2.5　空間ベクトルの外積

定義と性質

内積は 2 つのベクトルに対して実数を対応させる演算だったが，本小節で扱う外積は 2 つの空間ベクトルに対して空間ベクトルを対応させる演算である

定義 **1.5.** 直交座標系を定めた空間のベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し，

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} =& (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1) \\ =& \left(\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix},\ \det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix},\ \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積とよぶ.

座標空間の基本ベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ を形式的にスカラーとみなすと，$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積は

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

と表すこともできる．この形式的な表記は次の外積の性質を理解するのに有用である.

1.3　基底と座標系