ベクトルの成分表示

任意の平面ベクトル $\vec{p}$ に対して，このベクトルを位置ベクトルする点 P が定まる．このとき，P の座標 (x_1, x_2) をベクトル $\vec{p}$ の成分といい，$\vec{p} = (x_1, x_2)$ と表す（これをベクトルの成分表示[*6]という）．

平面に直交座標系 $\{O; E_1, E_2\}$ を 1 つ定めると，2 つのベクトル $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$，$\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ が自然に定まる（単位点の位置ベクトル）．これを座標系の基本ベクトルとよぶ．点 $P(x_1, x_2)$ を各座標軸に下ろした垂線の足をそれぞれ P_1, P_2 とすると，ベクトルの和の定義より，$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$ である．一方，スカラー倍の定義より，$\overrightarrow{OP_1} = x_1\overrightarrow{OE_1}$，$\overrightarrow{OP_2} = x_2\overrightarrow{OE_2}$ である．つまり，ベクトルの成分表示 $\vec{p} = (x_1, x_2)$ は基本ベクトルを用いて

$$\vec{p} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

と書き表せることを意味する．

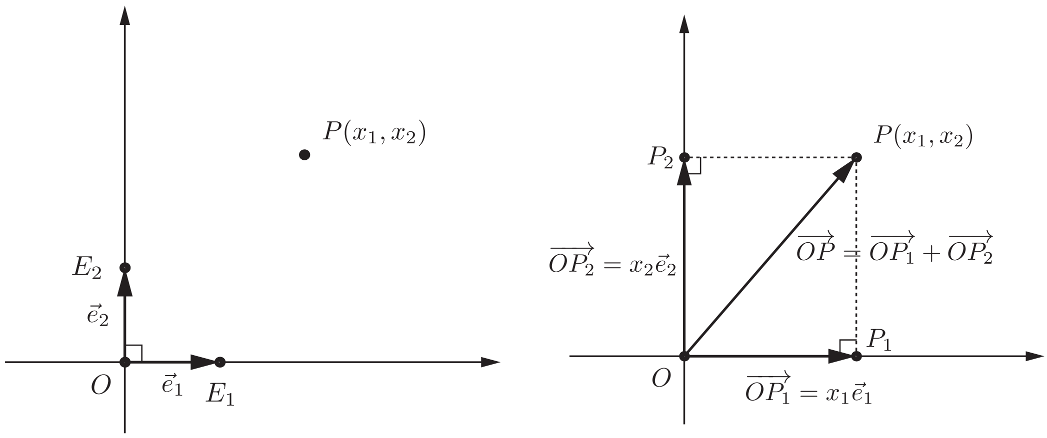

図 1.13　ベクトルの分解

ベクトルの線形演算は成分を用いて以下のように計算することができる．

ベクトルの成分表示と線形演算（平面の場合）

平面ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ と実数 t について，

(a)　$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

(b)　$t\vec{a} = (ta_1, ta_2)$

この性質の証明には，「ベクトルの成分表示 $\vec{p} = (x_1, x_2)$ は，基本ベクトルを使って $\vec{p} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ と書ける」という事実と，線形演算の性質（p.10）を用いる．例えば，

[*6] 点の座標が座標系の定め方依存するのと同様，ベクトルの成分表示も座標系に依存する．

(a) は

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}=&(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2)+(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2)\\=&(a_1\vec{e}_1+b_1\vec{e}_1)+(a_2\vec{e}_2+b_2\vec{e}_2)\\=&(a_1+b_1)\vec{e}_1+(a_2+b_2)\vec{e}_2.\end{aligned}$$

よって，$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$ となる．(b) も同様に示せる（詳細は省略する）．

空間ベクトルの成分表示も同様に考えられる．空間の直交座標系は原点 O と 3 つの単位点 E_1,E_2,E_3 によって定まるので，基本ベクトルは 3 つのベクトルの組 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ である．点 $P(x_1,x_2,x_3)$ の位置ベクトルは $\vec{p}=(x_1,x_2,x_3)$ と成分表示されるが，これは基本ベクトルを用いて $\vec{p}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ と表されることを意味する．線形演算も次のように計算できる．

ベクトルの成分表示と線形演算（空間の場合）

空間ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ と実数 t について，

(a)　$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$

(b)　$t\vec{a}=(ta_1,ta_2,ta_3)$

1.2.4　内積とノルム

定義と性質

定義 1.3. 零ベクトルでないベクトル $\vec{a},\vec{b}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ と始点が同一点となるように平行移動する．このとき，$\theta=\angle AOB$ をベクトル $\vec{a},\vec{b}$ のなす角とよぶ（図 1.14 左を参照）．ただし，$0\leq\theta\leq\pi$ とする．

定義 1.4. ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ に対し，実数 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ を

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta \tag{1.1}$$

と定義する（ただし，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角）．この $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積とよぶ．

内積は次のように幾何的に解釈できる．ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ となるように点 O,A,B を定める．さらに，B から線分 OA に下ろした垂線の足を H とするとき，内積 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ は線分 OA と OH の長さの積である（図 1.14 右を参照）．

内積の定義より，ベクトル $\vec{a}$ のノルムは $\|\vec{a}\|=\sqrt{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}$ と表すことができる．

ベクトルの内積とノルムは以下の性質を満たす；

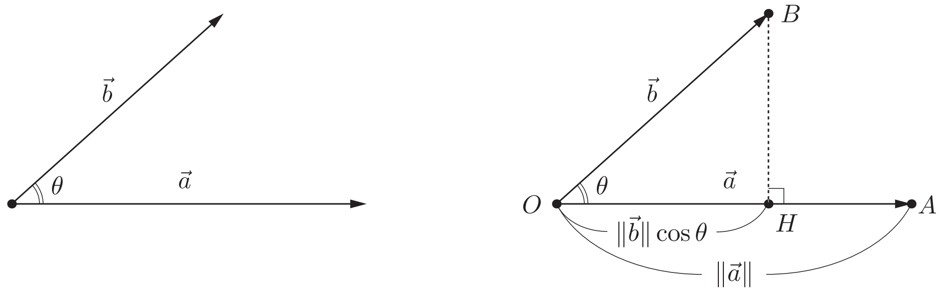

図 1.14　ベクトルのなす角と内積

ノルム $\|\cdot\|$ の性質

ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ と実数 t について，以下が成り立つ．

(n-1) $\|t\vec{a}\| = |t|\,\|\vec{a}\|$.
(n-2) 任意の $\vec{a}$ に対して $\|\vec{a}\| \geq 0$ である．$\|\vec{a}\| = 0$ となるのは $\vec{a} = \vec{0}$ のときに限る．
(n-3) $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$（これを三角不等式という）.

(n-1) と (n-2) はノルムの定義（p.9）から明らかだろう．(n-3) は「三角形の任意の 2 辺の長さの和は，残りの 1 辺の長さより大きい」ことを意味し，三角不等式と呼ばれている[*7]．図から直観的には理解できるが，これを厳密に示そうとすると，以下の内積の性質を用いなければならない．

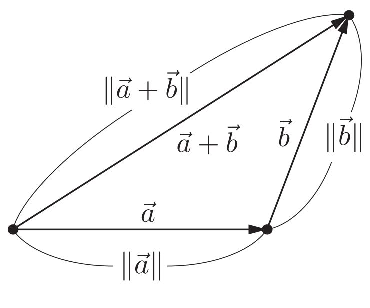

図 1.15　三角不等式

内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の性質

ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ と実数 t について，以下が成り立つ．

(ip-1) $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\vec{b},\vec{a}\rangle$.（対称性）
(ip-2) $\langle\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\rangle = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle + \langle\vec{a},\vec{c}\rangle$.（和に関する線形性）
(ip-3) $\langle\vec{a},t\vec{b}\rangle = \langle t\vec{a},\vec{b}\rangle = t\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.（スカラー倍に関する線形性）
(ip-4) $|\langle\vec{a},\vec{b}\rangle| \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$.

[*7] 等号が成り立つのは 3 辺が平行になるとき（つまり，三角形が線分につぶれるとき）である．

(ip-1) は内積の定義式 (1.1) から明らかである．(ip-3) もノルムの性質 (n-1) から，(ip-4) は $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であることから明らかである．

1.2.5　空間ベクトルの外積

1.3　基底と座標系