(a) $t > 0$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きで，ノルムが $t\|\vec{a}\|$ のベクトル，

(b) $t = 0$ のとき，$\vec{0}$，

(c) $t < 0$ のとき，$\vec{a}$ と逆の向きで，ノルムが $(-t) \times \|\vec{a}\|$ のベクトル

と定める．

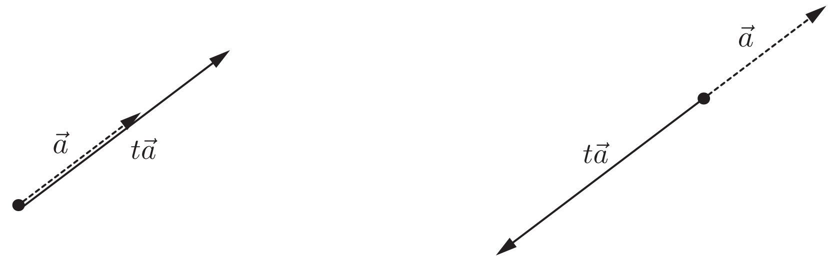

図 1.10　ベクトルのスカラー倍．$t > 0$ の場合（左）と $t < 0$ の場合（右）

この定義から，$-\vec{a} = (-1)\vec{a}$ であることがわかる．

定義 1.2. 零ベクトルでないベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，$\vec{a} = k\vec{b}$ となる実数 k が存在するとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行であるという．

ベクトルの和とスカラー倍の性質

ベクトルの和とスカラー倍は以下の性質を満たす．

ベクトルの線形演算の性質

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と実数 s, t に対し，以下の等式が成り立つ．

(a)	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	（和の交換法則）
(b)	$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	（和の結合法則）
(c)	$s(t\vec{a}) = (st)\vec{a}$	（スカラー倍の結合法則）
(d)	$(s + t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$	（分配法則）
(e)	$t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$	（分配法則）

(a) は和の定義で述べた．(b) は $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CD}$ と有向線分で表すことにより，$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AD}$ となることがわかる．

(c) と (d) はスカラー倍によってベクトルの向きとノルムがどのように変化するかに着目すればよい（詳細は省略する）．

(e) を $t > 0$ の場合について説明する．ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$ となるように点 A, B, C を定め，図 1.11 左のように，$\triangle ABC$ との相似比が $1 : t$ となる $\triangle AB'C'$ を考える．このとき，ベクトルの和の定義から $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ である．また，ベクトルのスカラー倍の定義と $\triangle ABC : \triangle AB'C' = 1 : t$ であることから，

$t\vec{a} = \overrightarrow{AB'}, t\vec{b} = \overrightarrow{B'C'}, t(\vec{a}+\vec{b}) = \overrightarrow{AC'}$ である．一方，$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} = t\vec{a} + t\vec{b}$ である．したがって，$t(\vec{a}+\vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ が成り立つ．

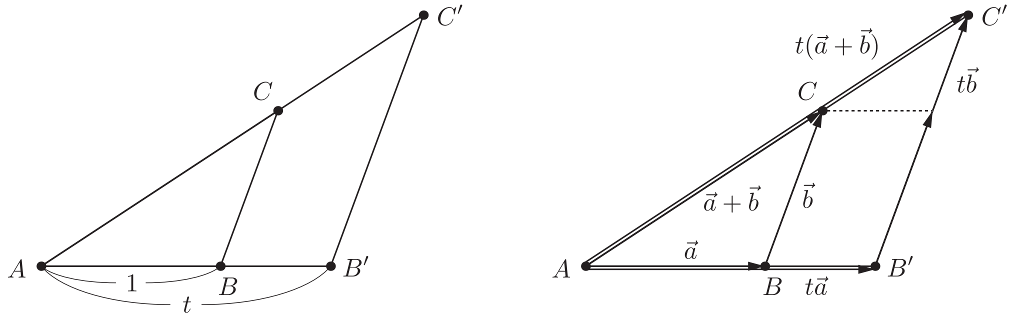

図 1.11　線形演算の分配法則

1.2.3　位置ベクトルとベクトルの成分表示

位置ベクトル

ここでは簡単のため，平面ベクトルを考える．平面に直交座標系 $\{O; E_1, E_2\}$ がひとつ定まっているとする．このとき，平面上の点 P に対して，原点を始点とするベクトル $\overrightarrow{OP}$ が自然に対応する．このベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ を点 P の位置ベクトルという．逆に，ベクトル $\vec{q}$ に対して $\vec{q}$ を位置ベクトルする点 Q が定まる．これは始点が原点 O となるように $\vec{q}$ を平行移動したときの終点である．この対応により，平面上の点と平面ベクトルは 1 対 1 に対応する[*5]．

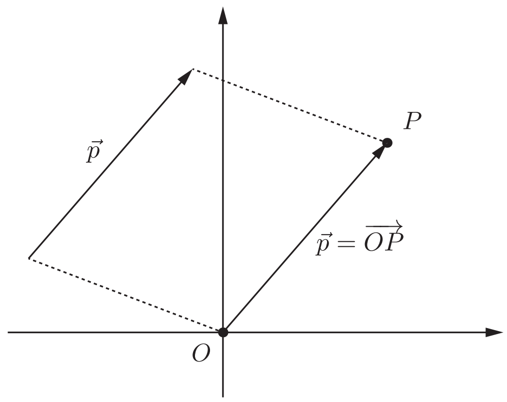

図 1.12　平面上の点の位置ベクトル

空間上の点の位置ベクトルもまったく同様に定義される．

[*5] 点と位置ベクトルとの対応は，座標系（厳密には点 O）を一つ固定すると定まることに注意せよ．

ベクトルの成分表示

任意の平面ベクトル $\vec{p}$ に対して，このベクトルを位置ベクトルする点 P が定まる．このとき，P の座標 (x_1, x_2) をベクトル $\vec{p}$ の成分といい，$\vec{p} = (x_1, x_2)$ と表す（これをベクトルの成分表示[*6]という）．

平面に直交座標系 $\{O; E_1, E_2\}$ を 1 つ定めると，2 つのベクトル $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$（単位点の位置ベクトル）が自然に定まる．これを座標系の基本ベクトルとよぶ．点 $P(x_1, x_2)$ を各座標軸に下ろした垂線の足をそれぞれ P_1, P_2 とすると，ベクトルの和の定義より，$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$ である．一方，スカラー倍の定義より，$\overrightarrow{OP_1} = x_1\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OP_2} = x_2\overrightarrow{OE_2}$ である．つまり，ベクトルの成分表示 $\vec{p} = (x_1, x_2)$ は，

$$\vec{p} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

と書き表せることを意味する．

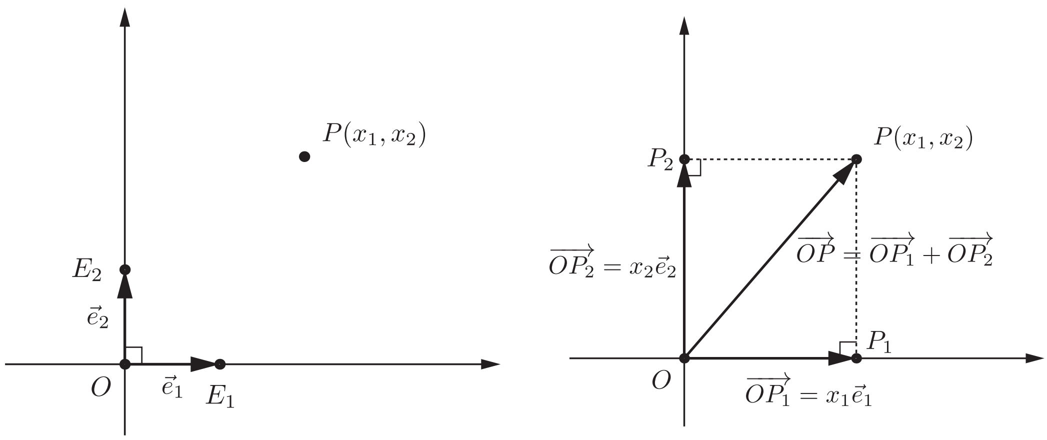

図 1.13　ベクトルの分解

ベクトルの線形演算を成分で表すと以下のように計算することができる．

ベクトルの成分表示と線形演算

ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ と実数 t について，

(a)　$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

(b)　$t\vec{a} = (ta_1, ta_2)$

この性質の証明には，「ベクトルの成分表示 $\vec{p} = (x_1, x_2)$ は，基本ベクトルを使って $\vec{p} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ と書ける」という事実と，線形演算の性質（p.10）を用いる．例えば，

[*6] 点の座標が座標系の定め方依存するのと同様，ベクトルの成分表示も座標系に依存する．

(a) は

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}=&(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2)+(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2)\\=&(a_1\vec{e}_1+b_1\vec{e}_1)+(a_2\vec{e}_2+b_2\vec{e}_2)\\=&(a_1+b_1)\vec{e}_1+(a_2+b_2)\vec{e}_2\end{aligned}$$

より，$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$ となる．(b) も同様に示せる（詳細は省略する）．

1.2.4　内積とノルム

1.2.5　空間ベクトルの外積

1.3　基底と座標系