2 つの座標軸が直交し，$|OE_1| = |OE_2|$ のとき[*3]，$\{O; E_1, E_2\}$ を直交座標系（またはデカルト座標系[*4]）という．直交座標系において，点の座標は各座標軸へ下ろした垂線の足の座標の組である．直交座標系をひとつ定めた平面を座標平面またはデカルト平面という．

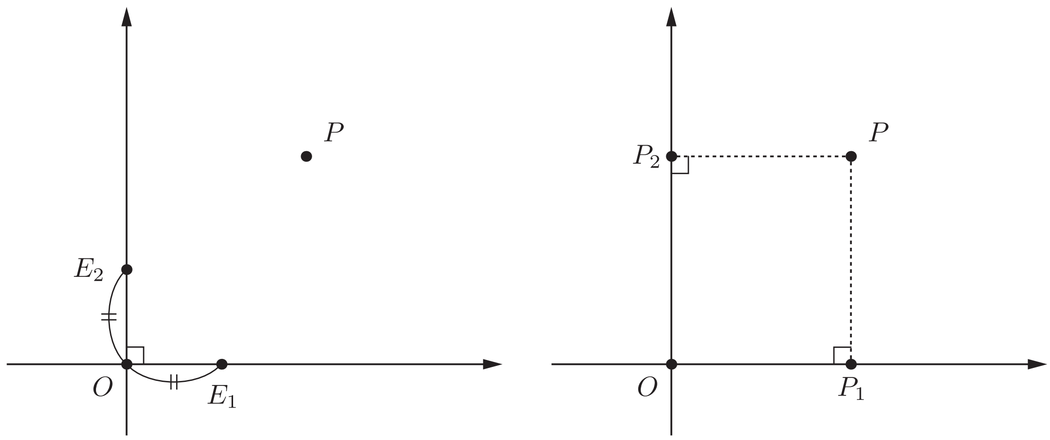

図 1.5　平面上の直交座標系（左）と座標の定め方（右）

1.1.3　座標空間

空間の直交座標系も平面の場合と同様の定義することができる．原点 O とその点で直交する 3 つの数直線（座標軸）ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 を定める（図 1.6 左を参照．それぞれの単位点 E_1, E_2, E_3 は，$|OE_1| = |OE_2| = |OE_3|$ を満たす）．空間上の点 P に対して，OP を対角線とし，各座標軸の一部を辺として持つ直方体を考える．各座標軸上にあり，その直方体の頂点となる点をそれぞれ P_1, P_2, P_3 とする．この点の座標が $P_1(x_1), P_2(x_2), P_3(x_3)$ のとき，(x_1, x_2, x_3) を点 P の座標といい，$\boldsymbol{P(x_1, x_2, x_3)}$ と書く．

上記のように，点 P に対して数の組 (x_1, x_2, x_3) を与える対応を原点 $\boldsymbol{O}$ と単位点 $\boldsymbol{E_1, E_2, E_3}$ から定まる空間の直交座標系といい，$\{O; E_1, E_2, E_3\}$ と表す．座標系をひとつ定めた空間を座標空間という．3 つ目の座標軸 ℓ_3 を $\boldsymbol{z}$ 軸または第 **3** 軸，$P(x_1, x_2, x_3)$ の x_3 を点 P の $\boldsymbol{z}$ 座標または第 **3** 座標とよぶ（ℓ_1, ℓ_2 および x_1, x_2 のよび方は平面の場合と同様である）．

空間の点 $(x_1, x_2, 0)$ は平面の点 (x_1, x_2) に自然に対応する．z 座標が 0 である空間の点の全体を $\boldsymbol{xy}$**-平面**とよぶ．同様に x 座標が 0 である空間の点の全体を $\boldsymbol{yz}$**-平面**，y 座標が 0 である空間の点の全体を $\boldsymbol{zx}$**-平面**とよぶ．

[*3] 単に座標系を定めるためならば，2 つの座標軸は直交する必要がなく，各座標軸における単位長さが異なっていてもよい．このような一般的な座標系を斜行座標系という．

[*4] これはフランスの哲学者，数学者のルネ・デカルトから採っている．彼は平面上の座標の概念を発見し，1637 年に発表された著書「方法序説」の中で言及している（これとは独立にフェルマーも空間の座標の概念を発見したと言われている）．直交座標系は英語で Cartesian coordinate system というが，これはデカルトが自身の名前をラテン語で Cartesius と名乗っていたことによる．

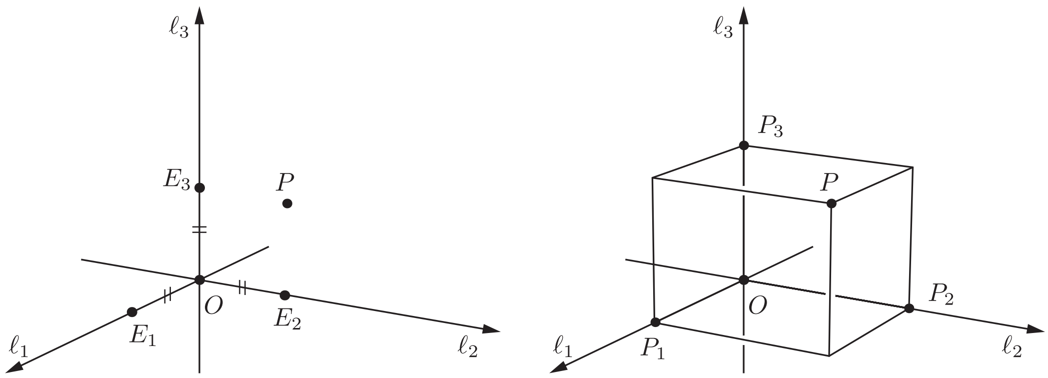

図 1.6　空間上の直交座標系（左）と座標の定め方（右）

1.2　ベクトル

1.2.1　有向線分と幾何ベクトル

有向線分

線分に「向き」を与えたものを有向線分という．「向き」とは始点と終点の情報のことである．点 A が始点で B が終点の有向線分を $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ と表す．有向線分を図示するときは，図 1.7 のように終点を矢印で表すことにする．

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BA}$ は線分としては同じだが，有向線分としては異なる．このとき，$\overrightarrow{BA}$ は $\overrightarrow{AB}$ と逆の向きを持つという．

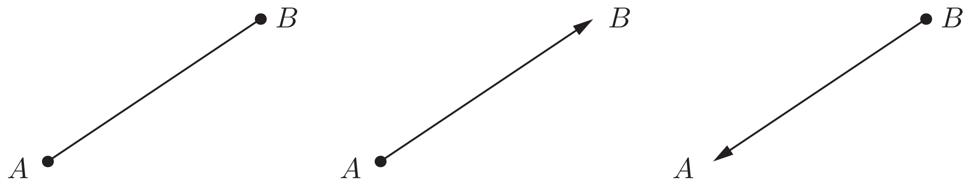

図 1.7　線分と有向線分．その逆向きの有向線分

幾何ベクトル

有向線分の始点の位置を無視し，「向き」と「大きさ（線分としての長さ）」だけから決まる量を幾何ベクトルという．有向線分 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{A'B'}$ が同じ幾何ベクトルを与えるとは，始点が重なるように一方を平行移動したとき，終点が重なるときをいう．これは，四角形 $ABB'A'$ が平行四辺形となることと同等である．単にベクトルという場合は幾何ベクトルのことをいうものとする．

始点と終点の情報を明記しないでベクトルを表すときはアルファベットの小文字を使っ

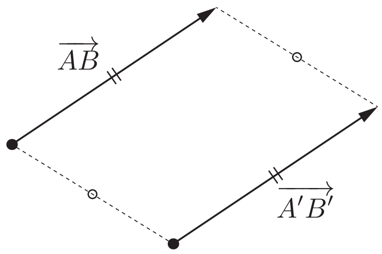

図 1.8　幾何ベクトルとして等しい有向線分

て $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ などと表す．$\vec{a}$ と逆の向きを持つベクトルを $-\vec{a}$ と表す．

定義 1.1. 始点と終点が同じ点のベクトルを零ベクトルといい，$\vec{\mathbf{0}}$ と表す．ベクトル $\vec{a}$ の線分としての長さをベクトルのノルムといい，$\|\vec{\boldsymbol{a}}\|$ と表す．例えば，$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ のとき，$\|\vec{a}\| = |AB|$ である．

ベクトル $\vec{a}$ が平面上の有向線分として表されるとき，$\vec{a}$ を平面ベクトルとよぶ．同様に，空間上の有向線分として表されるとき，$\vec{a}$ を空間ベクトルとよぶ．

1.2.2　ベクトルの線形演算

1.2.3　位置ベクトルとベクトルの成分表示

1.2.4　内積とノルム

1.2.5　空間ベクトルの外積

1.3　基底と座標系