情報数学 III – 線形代数テスト 解答

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(1) $AB = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$

(2) $BA = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}$

(3) ${}^tA + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

(4) ${}^tB - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}}$

$\boxed{2}$ サラスの公式を用いて計算する．

(1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) - 2 \times 2 = \underline{-5}$

(2) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -2 + 6 - 4 + 1 = \underline{1}$

$\boxed{3}$ 拡大係数行列を行基本変形によって簡約化する．

(1) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 7 \\ -x + y - 3z = -1 \\ 3x + y + z = 11 \end{cases} \xrightarrow{\text{(拡大係数行列)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 7 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

したがって，連立方程式 $\begin{cases} x \quad + \; z = 3 \\ \quad y - 2z = 2 \end{cases}$ を考えればよい．2 式に共通に含まれる未知数 z を $z = k$ とおくと，$x = -k + 3, y = 2k + 2$ となる．つまり解は $\underline{x = -k + 3,\ y = 2k + 2,\ z = k}$（ただし，$k$ は任意の実数）．

(2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{(拡大係数行列)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

したがって，連立方程式 $\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$ を考えればよい．2 式に共通に含まれる未知数 z を $z = k$ とおくと，$x = -k, y = -k$ となる．つまり解は $\underline{x = -k,\ y = -k,\ z = k}$（ただし，$k$ は任意の実数）．

$\boxed{4}$ 余因子展開とサラスの公式を用いて計算する．

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{2+2} \times (-2) \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (-2) \times (-6+2-3+1) = (-2) \times (-6) = \underline{12}$$

（2013.9.18 担当：佐藤）