

第 1 章

座標とベクトル

1.1 座標系

1.1.1 数直線（原点と単位点）

直線 l 上の点 P の位置を表すためにはどうすればいいだろうか.



図 1.1 直線 l 上の点 P

そのために、まず l 上に異なる 2 点 O, E を定める. そして、線分 OE の長さを単位 1 とし、点 P に対し、次のようにして実数 x を対応させる;

- (a) 点 P が点 O に関して、 E と同じ側にあるとき、 $x = |OP|$,
- (b) 点 P が点 O に関して、 E と反対側にあるとき、 $x = -|OP|$.

ただし、 $|OP|$ は線分 OP の長さを表す. このようにして定まる数 x を点 P の座標とい

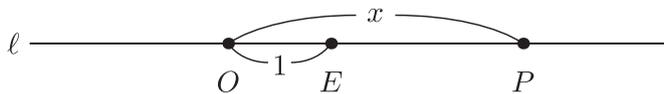


図 1.2 直線 l 上の基準点 O, E

い、 $P(x)$ と表す. 特に、 $O(0)$ とし、 $E(1)$ である.

座標とは、点に対し実数を対応させること^{*1}である. この「対応」は点 O と点 E の選び方によって決まる. 上記のようにして点 O, E から定まるこの「対応」を原点 O と単

^{*1} より厳密にいうと、点に対して数に対応させる写像である.

位点 E から定まる l の座標系といい, $\{O; E\}$ と表す. 座標系をひとつ定めた直線を数直線という. 数直線を表すとき, 原点 O は明示するが, 単位点は省略されることが多い. その場合は, 単位点がある側の線分の端点を矢印で表すことにする.

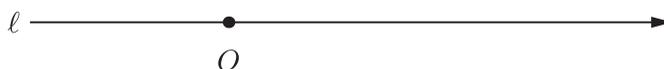


図 1.3 数直線 l

1.1.2 座標平面

次に, 平面上の点 P の位置を表すための方法を考える. まず, 適当に点 O をとり, その点を原点とする 2 つの数直線 l_1, l_2 を定める (それぞれ単位点を E_1, E_2 とする. 図 1.4 左を参照).

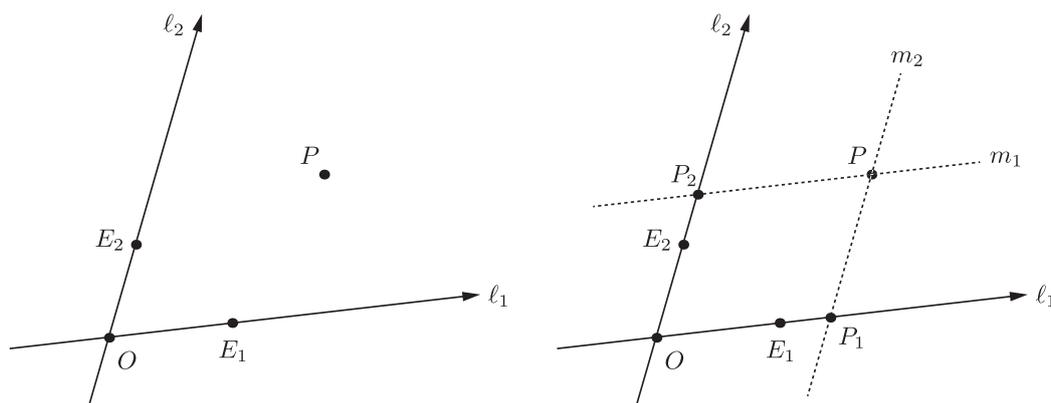


図 1.4 平面上の 2 つの座標軸 (左) と座標の定め方 (右)

このとき, 点 P を通り l_1, l_2 に平行な直線を m_1, m_2 とし, l_1 と m_2 との交点を P_1 , l_2 と m_1 との交点を P_2 とする (図 1.4 右を参照). 点 P_1, P_2 は数直線 l_1, l_2 上の点だから, それぞれ座標が定まる. $P_1(x_1), P_2(x_2)$ のとき, (x_1, x_2) を平面上の点 P の座標といい, $P(x_1, x_2)$ と表す. 特に, $O(0, 0), E_1(1, 0), E_2(0, 1)$ である.

点 P に対して数の組 (x_1, x_2) を与えるこの「対応」は点 O と 2 つの数直線, つまり単位点 E_1, E_2 の選び方によって決まる. 上記のようにして点 O, E_1, E_2 から定まるこの「対応」を原点 O と単位点 E_1, E_2 から定まる平面の座標系といい, $\{O; E_1, E_2\}$ と表す. 座標系をひとつ定めた平面を座標平面という. また, 座標系を定める 2 つの数直線を座標軸という. 特に, l_1 を x 軸または第 1 軸, l_2 を y 軸または第 2 軸とよび, $P(x_1, x_2)$ の x_1 を点 P の x 座標または第 1 座標, x_2 を点 P の y 座標または第 2 座標とよぶ.

2 つの座標軸が直交し, $|OE_1| = |OE_2|$ のとき*2, $\{O; E_1, E_2\}$ を直交座標系 (または

*2 単に座標系を定めるためならば, 2 つの座標軸は直交する必要がなく, 各座標軸における単位長さが異

デカルト座標系^{*3)}という。直交座標系において、点の座標は各座標軸へ下ろした垂線の足の座標の組である。

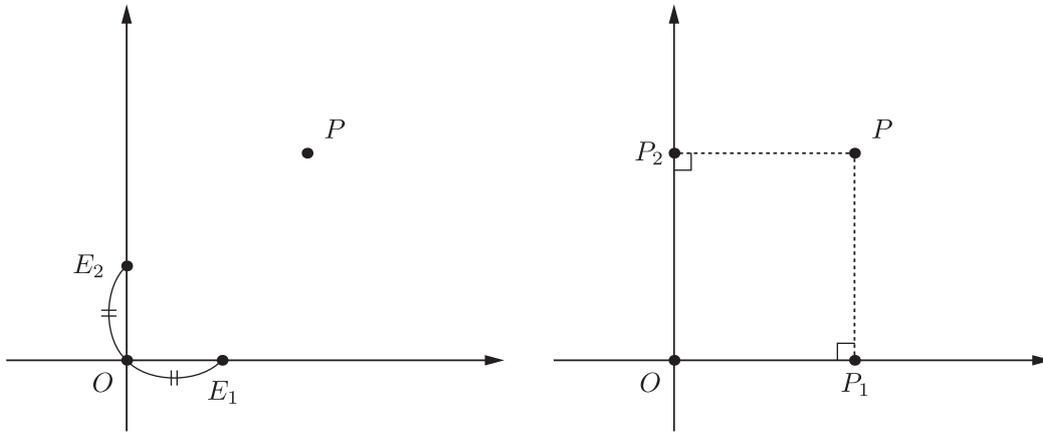


図 1.5 平面上の直交座標系 (左) と座標の定め方 (右)

直交座標系をひとつ定めた平面を座標平面またはデカルト平面という。

1.1.3 座標空間

1.2 ベクトル

1.2.1 有向線分

1.2.2 幾何ベクトル

1.2.3 ベクトルの成分表示

1.2.4 位置ベクトル

1.2.5 内積とノルム

1.2.6 空間ベクトルの外積

1.3 基底と座標系

なっている。このような一般的な座標系を斜行座標系という。

^{*3)} これはフランスの哲学者、数学者のルネ・デカルトから採っている。彼は平面上の座標の概念を発見し、1637年に発表された著書「方法序説」の中で言及している（これとは独立にフェルマーも空間の座標の概念を発見したと言われている）。直交座標系は英語で Cartesian coordinate system というが、これはデカルトが自身の名前をラテン語で Cartesius と名乗っていたことによる。