数学科教育法 解答

$\boxed{1}$

(1) 任意の $x \in X$ に対し，$x \leq a$ が成り立つ（$\forall x \in X, x \leq a$）．（補足：上界は集合ではない）

(2) a は X の元で（$a \in X$），かつ任意の $x \in X$ に対し，$x \leq a$ が成り立つ（$\forall x \in X, x \leq a$）．

(3) X の上界全体のなす集合の最小数のこと．$\min\{a \,|\, \forall x \in X, x \leq a\}$.

$\boxed{2}$

X	最大数	最小数	上　限	下　限	上に有界か	下に有界か
$\{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 < 3\}$	存在しない	存在しない	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	◯	◯
$\{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 3\}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	◯	◯
$\{x \,|\, x \in \mathbb{Q},\ x^2 \leq 3\}$	存在しない	存在しない	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	◯	◯
$\{x \,|\, x \in \mathbb{Z},\ x < 3\}$	2	存在しない	2	存在しない	◯	×
$\{x \,|\, x \in \mathbb{N},\ x < 3\}$	2	1	2	1	◯	◯
$\{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 3\}$	存在しない	存在しない	存在しない	存在しない	×	×

（補足）

- $\{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 < 3\} = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$ である．つまり，開区間 $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.
- $\{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 3\} = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\}$ である．つまり，閉区間 $\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$.
- X の最大数 a が存在するのなら，a は X の上限である（最小数，下限についても同様）.
- $\{x \,|\, x \in \mathbb{Z},\ x < 3\} = \{2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots\}$. $\{x \,|\, x \in \mathbb{N},\ x < 3\} = \{1, 2\}$.
- $\{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 3\} = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ x \leq -\sqrt{3}\} \cup \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ \sqrt{3} \leq x\} = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right)$.

$\boxed{3}$

(1) 「数学科教育法（牧野書店）」p.23 を参照せよ．

(2) 「数学科教育法（牧野書店）」p.25 の「**(1) 自然数の加法**」を参照せよ．

(3) 「数学科教育法（牧野書店）」p.27 の「**(2) 自然数の乗法**」を参照せよ．

(4)

$$
\begin{aligned}
3 \times 3 =& 3 \times 2' && (3 = 2') \\
=& 3 \times 2 + 3 && (\text{乗法の定義：} n \times m' = n \times m + n) \\
=& 6 + 3 && (\text{「}3 \times 2 = 6\text{」の詳細は課題 }\mathbf{7\text{-}2\ (2)}\text{ の解答を参照せよ}) \\
=& 6 + 2' && (3 = 2') \\
=& (6 + 2)' && (\text{加法の定義：} n + m' = (n + m)') \\
=& (6 + 1')' && (2 = 1') \\
=& ((6 + 1)')' && (\text{加法の定義：} n + m' = (n + m)') \\
=& ((6')')' && (\text{加法の定義：} n + 1 = n') \\
=& (7')' && (7 = 6') \\
=& 8' && (8 = 7') \\
=& 9 && (9 = 8')
\end{aligned}
$$

（**2012.7.25** 担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{4}}$ （注意と補足）：定義では $x_1, y_1 \geq 0$ としたが，a_n を定義する上では $y_1 > 0$ とすべきである．$(x_1) - 2(y_1) = 1$ という条件から，x_1, y_1 のいずれか（実際には x_1）は 0 でないから，x_n, y_n の定め方よりある n 以降では x_n および y_n はともに 0 でない．したがって，$x_1, y_1 > 0$ となりように初期値を定めることができる．

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$x_n, y_n \geq 0$ であるから，

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n \geq x_n, \qquad y_{n+1} = x_n + y_n \geq y_n.$$

したがって，$\underline{\text{いずれも単調増加}}$ である．

(2)

$$\begin{aligned}(x_n)^2 - 2(y_n)^2 =&(x_{n-1} + 2y_{n-1})^2 - 2(x_{n-1} + y_{n-1})^2 \\ =& - \left\{(x_{n-1})^2 - 2(y_{n-1})^2\right\} \\ =&(-1)^2 \left\{(x_{n-2})^2 - 2(y_{n-2})^2\right\} \\ =&(-1)^3 \left\{(x_{n-3})^2 - 2(y_{n-3})^2\right\} \\ &\vdots \\ =&(-1)^{n-1} \left\{(x_1)^2 - 2(y_1)^2\right\} \\ =&(-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

したがって，$\underline{n \text{ が偶数のときは } (x_n)^2 - 2(y_n)^2 = -1}$，$\underline{n \text{ が奇数のときは } (x_n)^2 - 2(y_n)^2 = 1}$ である．

(3) $(x_n)^2 - 2(y_n)^2 = \pm 1$ より，

$$(a_n)^2 = 2 \pm \frac{1}{(y_n)^2} \leq 2 + \frac{1}{(y_n)^2} \leq 2 + \frac{1}{(y_1)^2}$$

であるから，$\{a_n\}$ は上にも下にも有界である．例えば，$\sqrt{2 + 1/(y_1)^2}$ は $\{a_n\}$ の上界である．

(4) 定義から $a_n > 0$．したがって，下に有界であることは明らかである．たとえば，0 は $\{a_n\}$ の下界である．

(5)

$$\begin{aligned}b_{m+1} - b_m =&a_{2m+1} - a_{2m-1} = \frac{x_{2m+1}}{y_{2m+1}} - \frac{x_{2m-1}}{y_{2m-1}} \\ =&\frac{x_{2m+1}y_{2m-1} - x_{2m-1}y_{2m+1}}{y_{2m+1}y_{2m-1}} \\ =&\frac{(x_{2m} + 2y_{2m})y_{2m-1} - x_{2m-1}(x_{2m} + y_{2m})}{y_{2m+1}y_{2m-1}} \\ =&\frac{(x_{2m-1} + 2y_{2m-1} + 2(x_{2m-1} + y_{2m-1}))y_{2m-1} - x_{2m-1}(x_{2m-1} + 2y_{2m-1} + x_{2m-1} + y_{2m-1})}{y_{2m+1}y_{2m-1}} \\ =&\frac{(3x_{2m-1} + 4y_{2m-1})y_{2m-1} - x_{2m-1}(2x_{2m-1} + 3y_{2m-1})}{y_{2m+1}y_{2m-1}} \\ =&\frac{4(y_{2m-1})^2 - 2(x_{2m-1})^2}{y_{2m+1}y_{2m-1}} \\ =&-2 \cdot \frac{(x_{2m-1})^2 - 2(y_{2m-1})^2}{y_{2m+1}y_{2m-1}} \\ =&-2 \cdot \frac{1}{y_{2m+1}y_{2m-1}} < 0.\end{aligned}$$

したがって，任意の m に対して，$b_{m+1} < b_m$ が成り立つので，数列 $\{b_m\}$ は単調減少列である．

（補足）(4)(5) の結果から，数列 $\{b_m\}$ は下に有界な単調減少列であるから，収束することがわかる．

（2012.7.25 担当：佐藤）