

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

---

注意事項

- (1) 試験時間は 90 分 とする。
- (2) 解答が終わった者は、試験開始後 1 時間以降であれば途中退席して構わない。
- (3) これまで提出したレポート（に自筆で加筆したもの）、自筆のノート（およびブルーリーフ）、指定した教科書（および、この授業の内容に触発されて読んだ本）を参照してもよい。それ以外の資料は参照してはならない（答案提出時に参照した資料を確認します）。

**1**  $X$  を実数全体の集合  $\mathbb{R}$  の部分集合とする。このとき、次の問に答えなさい。

(1)  $a \in \mathbb{R}$  が  $X$  の上界であるとはどういうことか。  $a$  が満たすべき必要十分条件を述べなさい。

(2)  $a \in \mathbb{R}$  が  $X$  の最大数であるとはどういうことか。  $a$  が満たすべき必要十分を述べなさい。

(3)  $X$  の上限とは何か説明しなさい。

**2** 次の実数の部分集合  $X$  に対して、 $X$  の最大数、最小数、上限、下限を求め、下の表に記入しなさい（存在しない場合は「存在しない」と書くこと）。また、有界性についても調べ、有界ならば「○」を、有界でないならば「×」を記入しなさい。ただし、 $\mathbb{Q}$  は有理数全体の集合、 $\mathbb{Z}$  は整数全体の集合、 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  は自然数全体の集合とする。

| $X$                                       | 最大数 | 最小数 | 上 限 | 下 限 | 上に有界か | 下に有界か |
|---|-----|-----|-----|-----|-------|-------|
| $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 < 3\}$    |     |     |     |     |       |       |
| $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 3\}$ |     |     |     |     |       |       |
| $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 3\}$ |     |     |     |     |       |       |
| $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x < 3\}$      |     |     |     |     |       |       |
| $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\}$      |     |     |     |     |       |       |
| $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 3\}$ |     |     |     |     |       |       |

**3** ペアノの公理について以下の問に答えなさい。

- (1) 自然数の集合は「ある 5 つの条件」を満たす集合として定義される。その 5 つの条件を書きなさい。
- (2) ペアノの公理では「自然数の和」をどのように定義するか述べなさい。
- (3) ペアノの公理では「自然数の積」をどのように定義するか述べなさい。
- (4) (3) で述べた定義に従って「 $3 \times 3$ 」を計算しなさい（なお、式変形の過程で (1)(2)(3) のどの条件を使ったか詳細に明記すること）。

4 実数列  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  を漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases} \quad (x_1)^2 - 2(y_1)^2 = 1, \quad x_1, y_1 \geq 0$$

によって定義する. さらに  $a_n = \frac{x_n}{y_n}$  とおく. このとき, 以下の問に答えなさい.

- (1) 数列  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  はそれぞれ単調増加か, 単調減少か, またはそのいずれでもないか答えなさい (その理由も述べなさい). なお,  $x_n, y_n \geq 0$  である事実は証明することなく使ってよい.
- (2)  $(x_n)^2 - 2(y_n)^2$  の値を求めなさい.
- (3) 数列  $\{a_n\}$  は上に有界である. その上界を一つ挙げなさい. また, それが上界である根拠を説明しなさい.
- (4) 数列  $\{a_n\}$  は下に有界である. その下界を一つ挙げなさい. また, それが下界である根拠を説明しなさい.
- (5) 数列  $\{a_n\}$  の奇数番目だけを取り出した部分列を  $\{b_m\}$  とする (つまり,  $b_m = a_{2m-1}$ ). このとき, 数列  $\{b_m\}$  は単調減少であることを示しなさい.

5 この授業の中で取り上げたこと（および、この授業の内容に触発されて読んだ本）の中で最も興味深かったこと（概念、定理、事実など）や、さらに深く学んでみたいと思ったことを一つ挙げ、どういうところに興味を持ったかなど、それを挙げた理由を具体的に述べなさい。

6 「数学とはどのような学問であるか」ということを、この授業の最初に問いました。半期の授業を経て、自身の「数学観」は変わりましたか？ 変わった場合、どのように変わったかを述べなさい。