

東京電機大学 情報環境学部

数学科教育法 第 6 回

§2) 集合論のはなし

担当：佐藤 弘康

(前回のまとめ)

- 集合 X, Y に対し, 全単射 $f : X \rightarrow Y$ が存在するとき, 「 X と Y は同等である ($X \approx Y$)」という.
- 有限集合 X と Y が同等ならば, 2つの集合の要素 (元) の数は同じである.
- 無限を含め, 「要素の数」を表すものを集合の濃度という (「無限」にも大小がある).

集合の濃度

「集合全体の集まりを同等関係“ \approx ”によって類別した各同値類を濃度という」

- 集合 A の濃度を $|A|$ と書く.
- 有限集合 $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ ($\approx \{1, 2, \dots, k\}$) の濃度を k とする.
- $|\emptyset| = 0$ とする.
- $A \approx B$ ならば, $|A| = |B|$ とする.
(2つの集合の間に全単射が存在すれば, その集合は同じ濃度を持つ)
- 濃度に大小関係を定義する;
「 $A \subset B$ 」または「 A が B' ($\subset B$) と同等」ならば, $|A| \leq |B|$ とする.
- 無限集合の濃度は...

可算濃度

可算（可付番）の濃度 自然数の集合 \mathbb{N} と同等な集合の濃度 (\aleph_0 と書く).

可算集合（可付番集合）の例；

(自然数の集合 \mathbb{N} からの全単射が構成可能)

- 可算集合 A に有限個の元を加えた集合 $A \cup \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$
- 可算集合 A, B の和 $A \cup B$
- 整数の集合 $\mathbb{Z} (= \{-1, -2, -3, \dots\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N})$
- 可算集合 A, B の直積 $A \times B$
- 有理数の集合 \mathbb{Q}

実数の集合 \mathbb{R} は可算集合だろうか？

N の濃度と R の濃度

実数の集合 \mathbb{R} の濃度を考える；

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ より, $\aleph_0 \leq |\mathbb{R}|$.
- 开区間 $(0, 1)$ と \mathbb{R} は同等である. なぜなら…
 - 任意の 2 つの开区間 (a, b) と (c, d) は同等である.
 - $f(x) = \tan x$ により定義される写像 $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ は全単射である. したがって, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ と \mathbb{R} は同等である.

しかし,

- \mathbb{N} から开区間 $(0, 1)$ への全単射は存在しない.
(したがって, \mathbb{R} の濃度は \aleph_0 より真に大きい)

カントールの対角線論法

定理

\mathbb{N} から開区間 $(0, 1)$ への全単射は存在しない。

証明：背理法（カントールの対角線論法）で示す。

仮に全単射 $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ が存在したとする。 $k \in \mathbb{N}$ の像 $\varphi(k)$ を

$$\varphi(k) = 0. a_{k1} a_{k2} a_{k3} \cdots$$

と小数表示する。つまり、 $a_{kl} \in \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n \leq 9\}$ で、

$$\begin{aligned} 0. a_{k1} a_{k2} a_{k3} \cdots &= 0.1 \times a_{k1} + 0.01 \times a_{k2} + 0.001 \times a_{k3} + \cdots \\ &= \frac{a_{k1}}{10} + \frac{a_{k2}}{10^2} + \frac{a_{k3}}{10^3} + \cdots \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{kl}}{10^l}. \end{aligned}$$

カントールの対角線論法

$$\varphi(1) = 0. a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} \cdots$$

$$\varphi(2) = 0. a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} \cdots$$

$$\varphi(3) = 0. a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35} \cdots$$

$$\varphi(4) = 0. a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} a_{45} \cdots$$

⋮

⋮

ここで、 $b = 0. b_1 b_2 b_3 b_4 \cdots \in (0, 1)$ を次のように定める；

$$b_i = \begin{cases} 7 & (a_{ii} \text{ が偶数}) \\ 8 & (a_{ii} \text{ が奇数}) \end{cases}$$

すると、 $b \notin \varphi(\mathbb{N})$ である。これは $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ が全単射であるという仮定と矛盾する。（証明終）

連続濃度

連続濃度 実数の集合 \mathbb{R} と同等な集合の濃度 (\aleph と書く).

- $\aleph_0 < \aleph$
- 無理数の集合の濃度は \aleph .
 - A を無限集合, $B \subset A$ をたかだか可算 (有限集合か可算集合) な部分集合とする. このとき, $A - B$ が無限集合ならば, $|A| = |A - B|$ である.
- 平面 $\mathbb{R}^2 (= \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ と直線 \mathbb{R} は同じ濃度を持つ.
 - $\mathbb{R} \approx (0, 1) \approx (0, 1) \times (0, 1) \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

いくつかの問題

- \aleph_0 と \aleph の間の濃度は存在するのか？ (連続体仮説)

($\aleph_0 < |A| < \aleph$ を満たす集合 A は存在するのか？)

- 答え：わからない！
- 標準的な枠組み (公理系) のもとでは「正しいとも偽であるとも証明することができない」ことが証明されている。

- \aleph より真に大きい濃度は存在するのか？

($|A| > \aleph$ を満たす集合 A は存在するのか？)

- 答え：冪集合

冪集合

- A の冪集合とは, A のすべての部分集合の集合のこと (2^A と書く).
 - 例: $A = \{a, b, c\}$ の冪集合 2^A は
 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} (= A)$ の $8 (= 2^3)$ 個
- 冪集合は A から $\{0, 1\}$ への写像の全体と同一視できる.

$$2^A \approx \{\varphi \mid \varphi : A \rightarrow \{0, 1\}\}$$

$$(\varphi : A \rightarrow \{0, 1\} \text{ に対し, } \{x \in A \mid \varphi(x) = 1\} \subset A)$$

- 例: 上の例の $\{a, c\} \subset A$ は写像 $\varphi : A \rightarrow \{0, 1\}$;

$$\varphi(a) = 1, \quad \varphi(b) = 0, \quad \varphi(c) = 1$$

と対応する.

冪集合

定理

任意の集合 A に対して、 $|A| < |2^A|$ が成り立つ。

証明： A から 2^A への単射は存在する ($x \mapsto \{x\}$)。 A から 2^A への全射が存在しないことを背理法で示す。

全射 $g : X \rightarrow 2^X$ が存在したとする。

$$A = \{x \mid x \notin g(x)\}$$

とおくと $A \in 2^X$ だから、 g の全射性より $g(a) = A$ となる $a \in X$ が存在する。

- $a \in A$ ならば、 $a \notin g(a) (= A)$: 矛盾!
- $a \notin A$ ならば、 $a \in g(a) (= A)$: 矛盾! (証明終)

冪集合

定理

任意の集合 A に対して, $|A| < |2^A|$ が成り立つ.

- 上の定理から, 「いくらでも大きい濃度をもつ集合が存在する」
- $2^{\mathbb{N}}$ の濃度は?
 - \aleph_0 よりは真に大きい. では $|2^{\mathbb{N}}| = \aleph?$
 - 全単射 $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow (0, 1)$ が存在する.

集合論におけるパラドクス

ラッセルのパラドクス

- 自分自身を要素として含まない集合を A -集合
- 自分自身を要素として含む集合を B -集合

とよぶ。このとき、 A -集合の全体 S は A -集合でも B -集合でもない。

- S が A -集合であるとする。
 - A 集合の定義から $S \notin S$.
 - S の定義から $S \in S$.
- S が B -集合であるとする。
 - B -集合の定義から $S \in S$ (これは S が A -集合の全体の集合であることと矛盾).

集合論におけるパラドクス

床屋のパラドックス（ラッセルのパラドックスの喩え話）

ある村でたった一人の床屋は、自分で髭を剃らない人全員の髭を剃り、それ以外の人々の髭は剃らない。では、床屋自身の髭は誰が剃るのだろうか？

- 床屋が自分の髭を剃らなければ、彼は規則に従って髭を自分で剃らなくてはいけなくなり、矛盾。
- 床屋が自分の髭を剃るならば、「自分で髭を剃らない人の髭を剃る」という規則に矛盾。

集合論におけるパラドクス

カントールのパラドクス

すべての「集合」の集合を Y とする。このとき、 Y の冪集合 2^Y は「集合」ではない。

教科書 p.22 を参照。

素朴集合論

公理を特定せずに議論を進める。

公理的集合論

公理を定めて厳密に議論を展開（パラドクスを回避）。

公理的集合論

ZF 公理系：ツェルメロが作ったものをフレンケルとスコームが改良

- **外延性の公理**： A と B が全く同じ要素を持つのなら A と B は等しい。
- **空集合の公理**：要素を持たない集合が存在する。
- **対の公理**：任意の集合 x, y に対して、 x と y のみを要素とする集合が存在する。
- **和集合の公理**：任意の集合 X に対して、 X の要素の要素全体からなる集合が存在する。
- **無限公理**：空集合を要素とし、任意の要素 x に対して $x \cup \{x\}$ を要素に持つ集合が存在する。
- **冪集合の公理**：任意の集合 X に対して X の部分集合全体の集合が存在する。
- **置換公理**：“関数クラス”による集合の像は集合である。
- **正則性公理（基礎の公理）**；空でない集合は必ず自分自身と交わらない要素を持つ。

公理的集合論

ZFC 公理系 = ZF 公理系 + 選択公理

選択公理

X が互いに交わらないような空でない集合 A_λ ($\lambda \in \Lambda$) の集合であるとする。つまり、

$$X = \{A_\lambda \mid A_\lambda \cap A_{\lambda'} = \emptyset \ (\lambda \neq \lambda')\}$$

このとき、 X の各要素 A_λ から一つずつ要素をとってきたような集合（選択集合）が存在する

公理的集合論

- 「すべての集合に濃度が定義できる」ためには選択公理が必要.
- ラッセルのパラドクスにある「集合 S 」は ZFC 公理系では構成不可能.
- ZF 公理系が無矛盾ならば, ZFC 公理系も無矛盾.
- ZFC 公理系が無矛盾ならば, ZFC に連続体仮説を付け加えた公理系も無矛盾.
- ZFC 公理系が無矛盾ならば, ZFC に連続体仮説の否定を付け加えた公理系も無矛盾.
(つまり, ZFC 公理系では連続体仮説が真とも偽とも言えない)

参考文献

- 「集合・位相入門」 松坂和夫 著（岩波書店）
- 「選択公理と数学」 田中尚夫 著（遊星社）
- 「岩波数学辞典 第4版」 日本数学会 編集（岩波書店）
- Wikipedia : 集合, 濃度, 他