

課題 5-1

- (1) $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$
 (2) $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y, x \in X\}$

課題 5-2

- (1) 閉区間 $[-1, 1]$
 (2) $(0, +\infty)$
 (3) $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 \geq 2$ より, $[2, +\infty)$

課題 5-3

- (1) f の値域は $[0, +\infty)$ だから, 終域を $[0, +\infty)$ にすると, 全射になる.
 (2) $f(a) = f(b)$ ならば $b = -a$ であるから, 例えば定義域を $[0, \infty)$ に制限すれば, f は単射になる.

課題 5-4

- (1) $f: \mathbb{N} \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ を $f(n) = 2n - 1$ と定義すれば, これは全単射である.
 (2) $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{a\}$ を

$$g(n) = \begin{cases} a & (n = 1 \text{ のとき}) \\ n - 1 & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めれば, g は全単射である.

課題 5-5

(1) $\Phi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

(2) $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$. $\Phi(zw) = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}$

(3) $\Phi(z) \cdot \Phi(w) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}$

(2), (3) の結果から, 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対し, $\Phi(zw) = \Phi(z) \cdot \Phi(w)$ が成り立つ. これを写像 Φ は積 (群構造) を保つという.

(4) 複素数 $z = a + bi$ の絶対値 $|z|$ とは $\sqrt{a^2 + b^2}$ で定まる実数のことである. 複素数平面で考えると $|z|$ は原点 0 から z までの距離に等しい.

(5) $\det \Phi(z) = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 = |z|^2$. つまり, 写像 Φ によって \mathbb{C} を $M(2; \mathbb{R})$ の部分集合と考えると, 行列式は複素数の絶対値 (の 2 乗) と解釈できる.