

--	--	--	--	--	--	--

課題 5-1 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し、次の定義を述べなさい。

- (1) f の値域 $f(X)$.
- (2) $y \in f(X)$ の原像 $f^{-1}(y)$ (逆像ともいう).

課題 5-2 次の写像 (関数) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の値域を答えなさい。

- (1) $f(x) = \sin x$
- (2) $f(x) = e^x$
- (3) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

課題 5-3 $f(x) = x^2$ で定義される写像 (関数) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ について次の問に答えなさい。

- (1) f は全射か? 全射でないならば, 全射になるように定義域または終域を変えなさい。
- (2) f は単射か? 単射でないならば, 単射になるように定義域または終域を変えなさい。

課題 5-4 \mathbb{N} を自然数全体の集合とする。次の各集合が \mathbb{N} と同等であることを示しなさい (\mathbb{N} を定義域とする全単射をつくりなさい)。

- (1) 奇数全体の集合 $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- (2) $\mathbb{N} \cup \{a\}$

課題 5-5 2つの写像 $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow M(2; \mathbb{R})$ を

$$\varphi(a+bi) = (a, b), \quad \psi(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

と定義する (ただし, $M(n; \mathbb{R})$ は実数を成分とする n 次正方行列の全体). このとき, 次の間に答えなさい.

- (1) φ と ψ の合成写像 $\psi \circ \varphi$ を Φ とおく. つまり, $\Phi = \psi \circ \varphi: \mathbb{C} \rightarrow M(2; \mathbb{R})$. $a+bi \in \mathbb{C}$ の Φ による像 $\Phi(a+bi)$ を書きなさい (像は行列).
- (2) $z = a+bi$, $w = c+di$ とする. 複素数の積 zw を計算し, Φ による zw の像 $\Phi(zw)$ を書きなさい.
- (3) 行列 $\Phi(z)$ と $\Phi(w)$ の積 $\Phi(z) \cdot \Phi(w)$ を計算しなさい.
- (4) 複素数 z の絶対値の定義を述べなさい.
- (5) $\det \Phi(z)$ を求めなさい.

課題 5-6 本日の授業の感想を書きなさい (興味深かったこと, もっと知りたいと思ったことなど).