東京電機大学 情報環境学部

数学科教育法 第４回
§1) 数学とはどのような学問か（３）

担当：佐藤 弘康

（前回のまとめ）

- 17 世紀に入り . . .
  - 座標の導入により，幾何の問題を代数的に解くことが可能に（解析幾何学，座標幾何学）.
  - 曲線の接線を求めることと面積を求めることが逆の演算であることが明らかになった（微分積分法の基本定理）.
- 一方，江戸時代の日本では「和算」とよばれる数学が独自の発展を遂げた．一般市民にも数学愛好家が多く，数学の問題を神社や仏閣の奉納する「算額」という文化があった.

18 世紀の数学（省略）

- ヤコブとヨハンのベルヌーイ兄弟，オイラー，ラグランジュなどにより微分積分学やその応用がはなばなしく展開.
- 解析学の他，幾何学，整数論，物理学への応用などの輝かしい成果を挙げた．これを土台とし，19 世紀に数学は「未曾有の飛躍的進歩」を遂げ，20 世紀の抽象数学へとつながる.

§1) 数学の歴史

(1) 古代オリエントの数学

(2) ギリシア数学

(3) 中世の数学

(4) 17 世紀の数学（解析幾何学, 微分積分学）

(5) 和算 ー 江戸時代・日本の数学

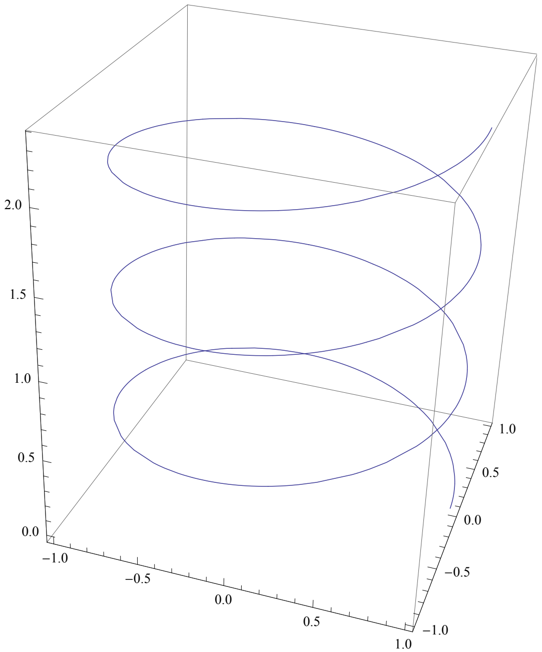
(6) 近代・現代の数学（幾何学）

- 解析幾何から微分幾何へ
- 非ユークリッド幾何学
- リーマン幾何学

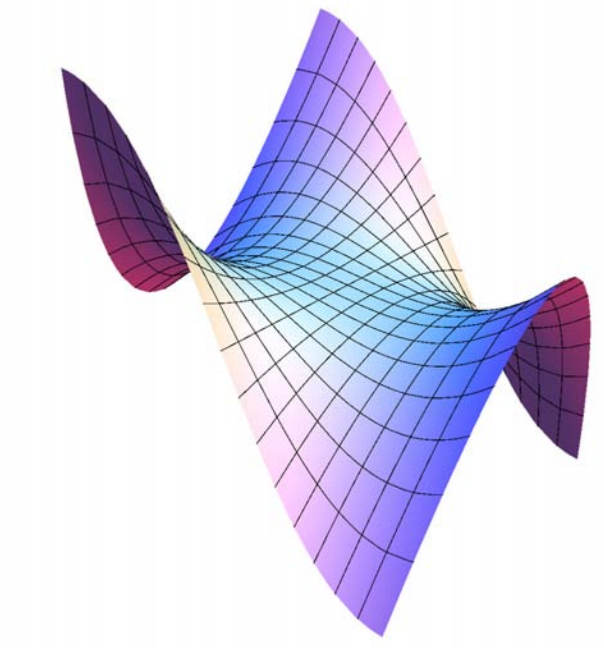
1.6.1) 解析幾何（平面の幾何）から微分幾何へ

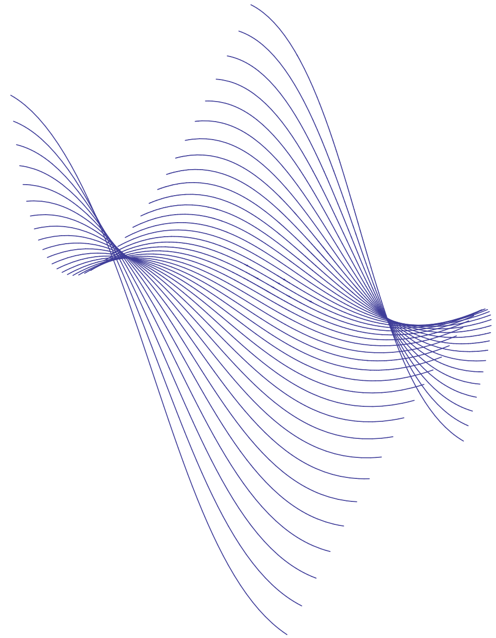
微分幾何　空間内の曲線や曲面の幾何学（重要な概念：曲率）

曲線は運動する点の軌跡



曲面は曲線を連続的に変形しながら動かした軌跡





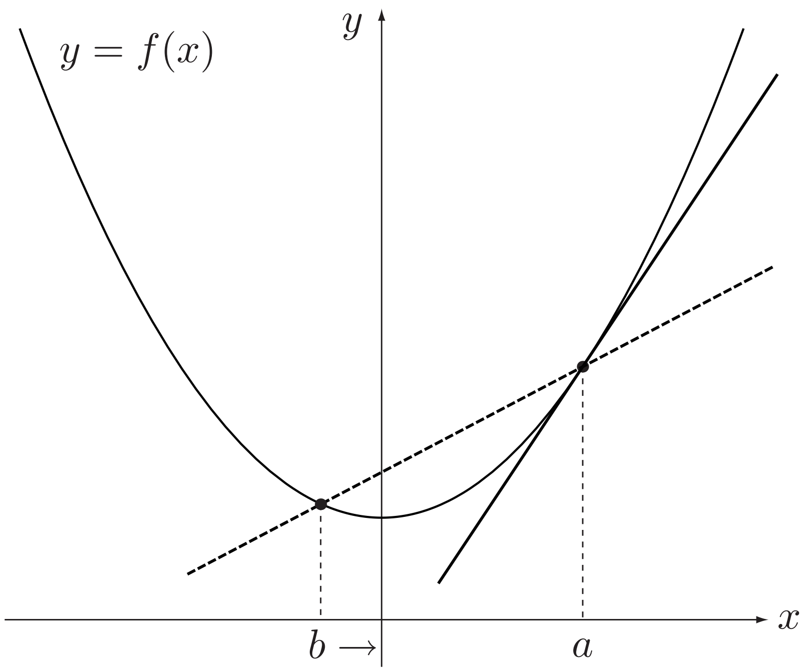
陽関数表示	：$y = f(x)$	$z = f(x, y)$
陰関数表示	：$F(x, y) = c$	$F(x, y, z) = c$
パラメータ表示	：$p(s) = (x(s), y(s))$	$p(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$

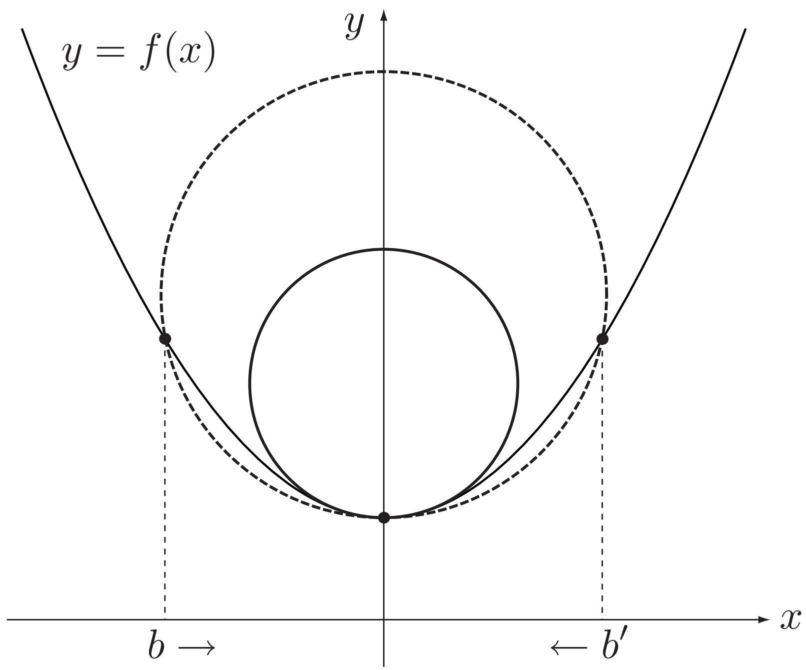
1.6.1) 解析幾何から微分幾何へ

平面曲線の曲率（定義）

$\boxed{\text{接線}}$ 2 点を通る直線の極限

$\boxed{\text{接触円}}$ 3 点を通る円の極限





- 接触円の半径 r：「曲率半径」
- 接触円の半径 r の逆数 $\dfrac{1}{r}$：「曲率」

1.6.1) 解析幾何から微分幾何へ

平面曲線の曲率（公式）

平面内の曲線 $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における曲率円（接触円）の

- 中心は $\left(a - \dfrac{\left\{1 + (f'(a))^2\right\} f'(a)}{f''(a)},\ f(a) + \dfrac{1 + (f'(a))^2}{f''(a)}\right)$
- 半径は $\dfrac{\left\{1 + (f'(a))^2\right\}^{3/2}}{|f''(a)|}$

となる.

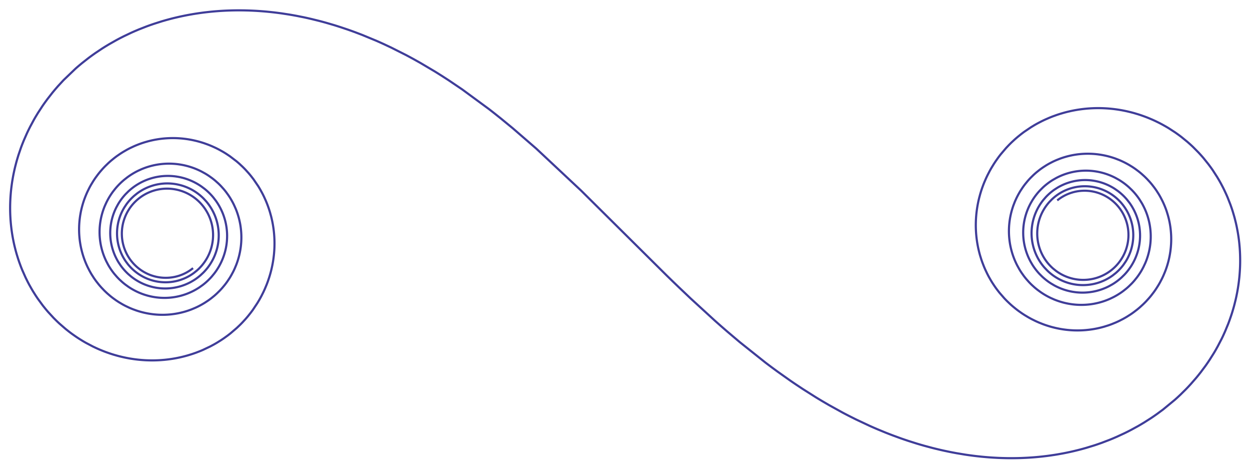
1.6.1) 解析幾何から微分幾何へ

平面曲線の曲率：曲線を一定速度で走る車の軌跡とみると

「曲率半径」＝ハンドルの回転角

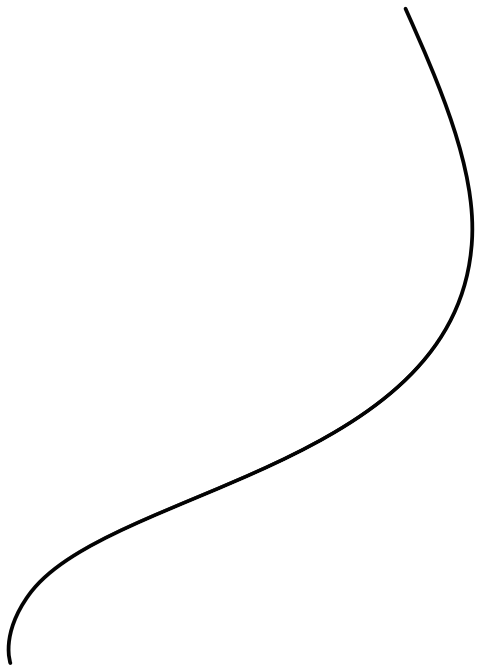
クロソイド曲線

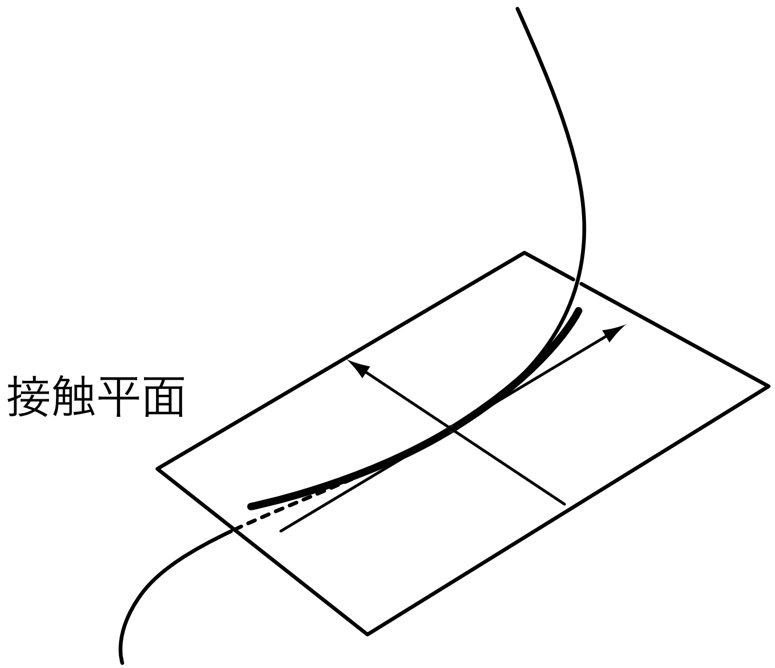
- 速度一定で，ハンドルを一定の角速度で回したときに車が描く軌跡.
- 道路は直線，円弧，クロソイド曲線を複合させて設計（クロソイド工法）



1.6.1) 解析幾何から微分幾何へ

空間内の曲線においては曲率と捩率が定義できる.



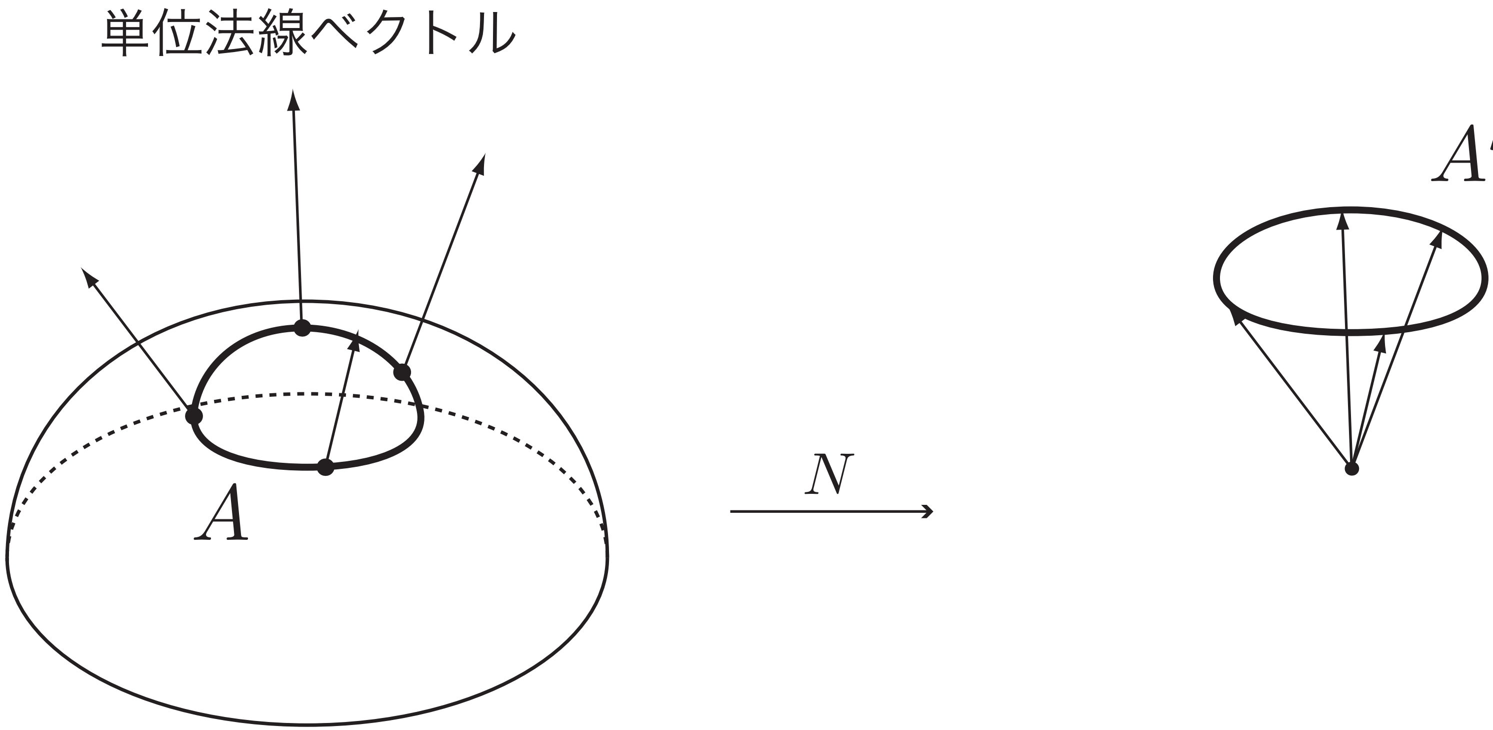


- 「捩率」＝接触平面から離れる度合い
- 捩率が零 $\Longleftrightarrow$ ある平面内に曲線

1.6.1) 解析幾何から微分幾何へ

空間内の曲面にも曲率の概念が定義可能

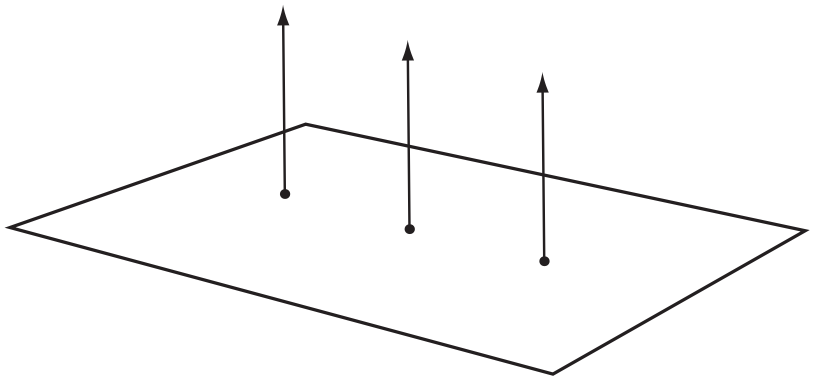
ガウス曲率　「曲面と球面の対応する無限小領域の面積の比（符号付き）」

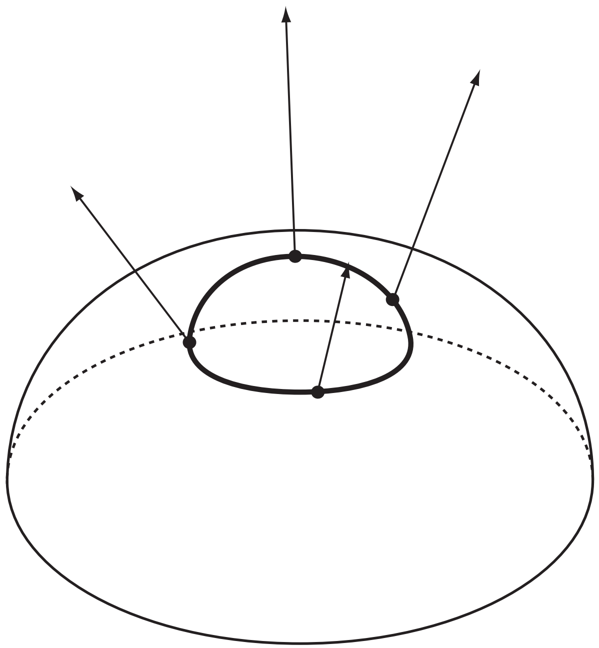


曲面の点 p におけるガウス曲率：$\varepsilon \lim_{A \to p} \dfrac{(A' \text{ の面積})}{(A \text{ の面積})}$　（ただし，$\varepsilon = \pm 1$）

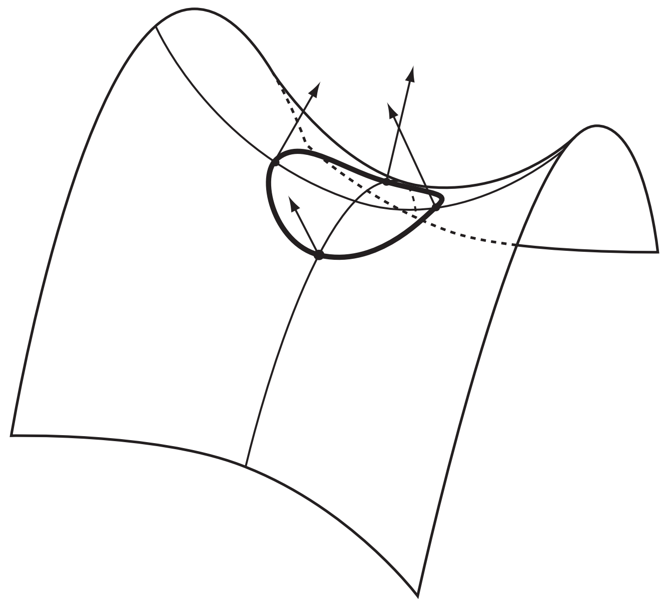
1.6.1) 解析幾何から微分幾何へ

ガウス曲率が零





ガウス曲率が正



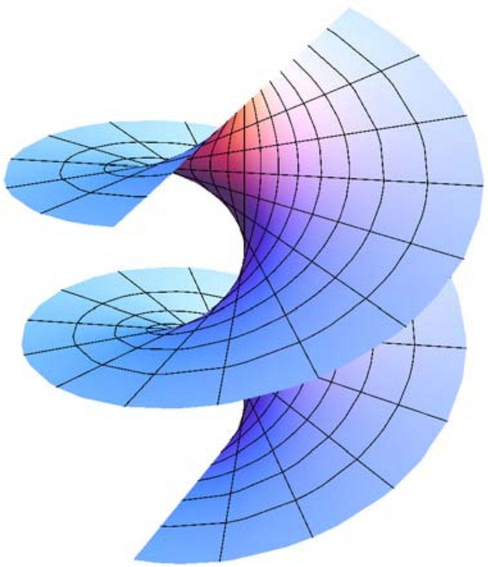
ガウス曲率が負

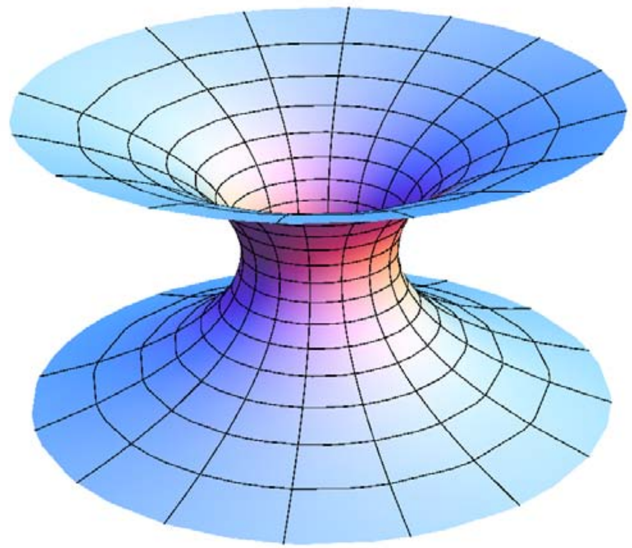
1.6.1) 解析幾何から微分幾何へ

ガウスの最もすばらしい定理

曲面をもうひとつの曲面に展開してもガウス曲率は変わらない.

曲面が空間にどのような形で埋めこまれていようとガウス曲率は不変である（ガウス曲率は曲面の内在的性質である）.





1.6.2) 非ユークリッド幾何学

ユークリッド「原論」5 つの公準

(1) 点と点を直線で結ぶ事ができる.

(2) 線分を延長して直線にできる.

(3) 一点を中心にして任意の半径の円を描く事ができる.

(4) 全ての直角は等しい.

(5) 直線が 2 直線に交わり，同じ側の内角の和を 2 直角より小さくするならば，この 2 直線は限りなく延長されると，2 直角より小さい角のある側において交わる（平行線公準）.

1.6.2) 非ユークリッド幾何学

平行線公準

直線が 2 直線に交わり，同じ側の内角の和を 2 直角より小さくするならば，この 2 直線は限りなく延長されると，2 直角より小さい角のある側において交わる.

- この公準は他のほど自明ではない.
- もっと自明で簡潔な同値命題が存在するのでは？

  平行線公準 $\Longleftrightarrow$「平行線の錯角は等しい」
- プロクロス（紀元前 5 世紀，古代ギリシアの哲学者）

  「これは定理なのではないか？」(平行線問題)

1.6.2) 非ユークリッド幾何学

平行線問題

- プトレマイオス（1 世紀後半〜，ギリシアの数学者・天文学者）

　　「平行線公準を証明した！」

　この証明は第 1 巻命題 29（つまり平行線公準）に依っている → 失敗

- サッケーリ（17 世紀〜，イタリア）

　　平行線公準 $\Longleftrightarrow$「三角形の内角の和は 2 直角」（直角仮定）

　◦「全ての三角形の内角の和は 2 直角よりも小さい」（鋭角仮定）

　◦「全ての三角形の内角の和は 2 直角よりも大きい」（鈍角仮定）

　鋭角仮定と鈍角仮定が共に矛盾を導くことを示したい → 失敗

- ランベルト（18 世紀，スイス）や，
- ルジャンドル（18 世紀，フランス）もサッケーリと同様の考え方.

1.6.2) 非ユークリッド幾何学

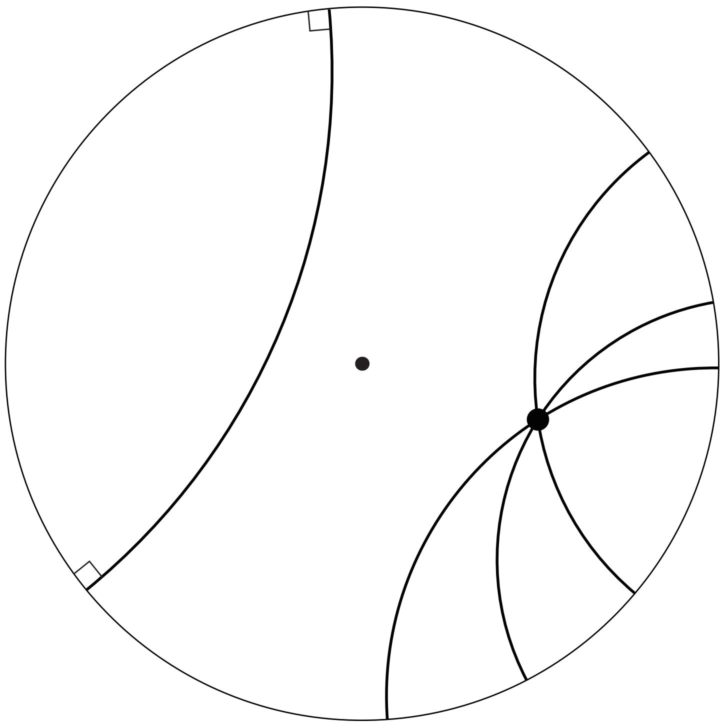
平行線問題の解決：平行線公準を他の命題に置き換えても幾何が展開できる.

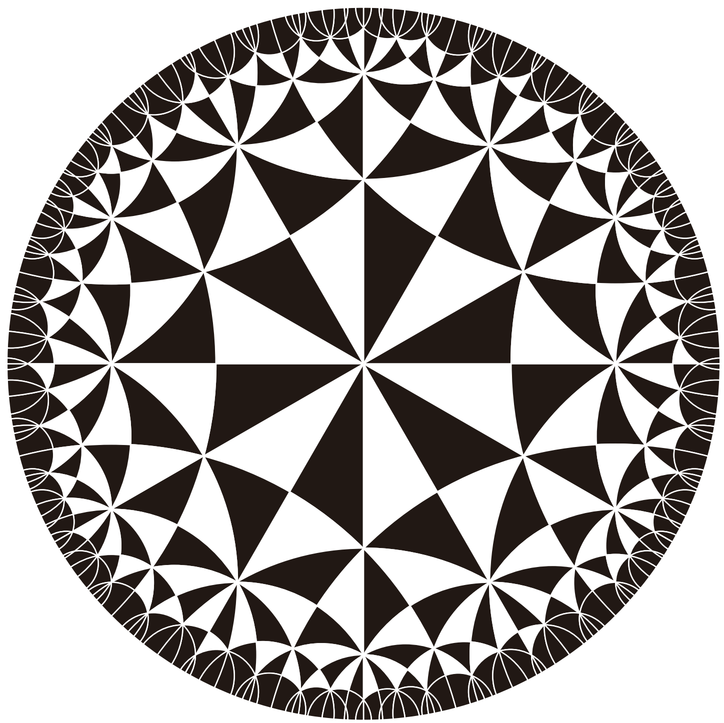
- ロバチェフスキー（19 世紀，ロシア）
  「虚の幾何学」（鋭角仮定を含む幾何学）を構成
- ボーヤイ（19 世紀，ハンガリー）
  平行線公準を仮定した幾何学および平行線公準の否定を仮定した幾何学を論じ，どちらが現実に成立するかは論理的推論によって決定されないことを証明.
- ガウス（19 世紀，ドイツ）
  ロバチェフスキー，ボーヤイと同様の幾何学を構成．哲学的・宗教的論争を避けるため成果を発表することはなかった.

1.6.2) 非ユークリッド幾何学

双曲幾何学　ロバチェフスキー，ボーヤイの幾何学

- 三角形の内角の和は 2 直角より小さい.
- ポアンカレの円板モデル；「直線」＝境界の円と直交する円の一部.
- ある点を通り，その点を通らない直線に平行な直線は無限に存在する.





1.6.2) 非ユークリッド幾何学

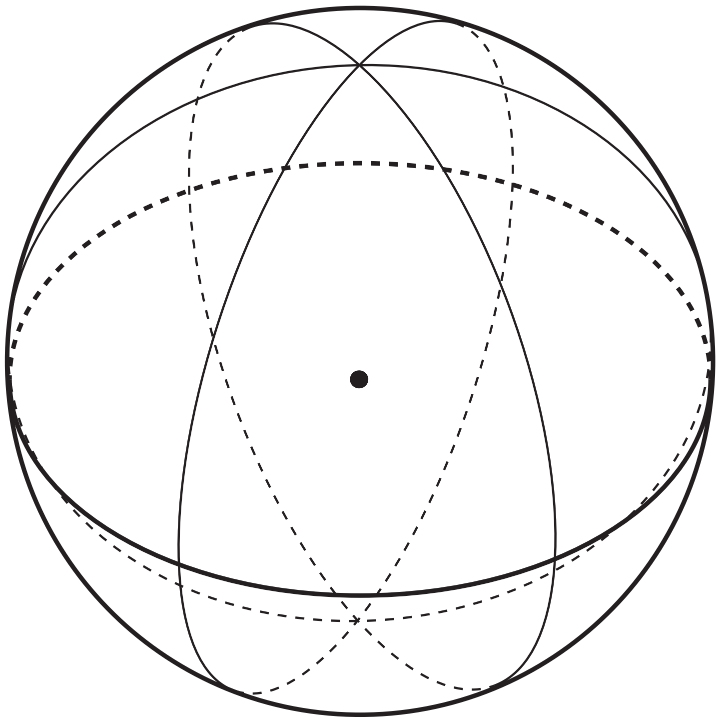
双曲幾何学

M. C. エッシャー「円の極限 IV」（1960 年）

1.6.2) 非ユークリッド幾何学

球面幾何学

- 三角形の内角の和は 2 直角より大きい.
- 「直線」＝ 2 点を結ぶ最短線（測地線）＝大円の一部
- どんな直線も必ず 2 点で交わる（平行線は存在しない）.



1.6.3) リーマン幾何学

多次元空間の幾何学

- グラスマン，シュレーリフ，ジョルダンなど

  $\mathbb{R}^n$ 内の直線，平面，曲面の幾何学
- リーマン（19 世紀，ドイツ）
  - 「n 重に広がった多様体」；多様体の概念（局所的に座標が入る）
  - リーマン計量：空間の各点に対して正定値対称行列を対応させる関数（写像）.
    - ベクトルの長さ・角度，曲線の長さ，面積などが計算可能.
    - 最短線である「測地線」や曲率も定義可能.
  - ガウスの内在的幾何の考え方を一般化.

1.6.3) リーマン幾何学

リーマン幾何学の応用例：アインシュタインの相対性理論

- この世界を「空間 3 次元」と「時間 1 次元」の 4 次元空間（多様体）と考える（ミンコウスキーによる 4 次元時空の幾何学).
- アインシュタインは 4 次元時空に曲がった（擬）リーマン計量を定義.
- 重力を「空間の曲率」として解釈.
- アインシュタイン方程式；$R_{ij} - \dfrac{R}{2} g_{ij} = 8\pi T_{ij}$

  大きい質量の物体（右辺）は時空の重力（左辺）を歪ませる.

- 重力レンズ効果（重力により光が曲げられる）の観測により，一般相対性理論が正しいことが証明された.

参考文献

- 「ユークリッド幾何から現代幾何へ」 小林昭七 著（日本評論社）
- 「19 世紀の数学 II 幾何学・解析関数論」 小林昭七 監訳（朝倉書店）
- 「岩波数学辞典 第４版」 日本数学会 編集（岩波書店）
- Wikipedia ：非ユークリッド幾何学，他