東京電機大学 情報環境学部

数学科教育法 第 3 回
§1) 数学とはどのような学問か（２）

担当：佐藤 弘康

（前回のまとめ）

- 古代文明における数学は実用的な計算や経験的に得られた知識がほとんどであった.
- その後，ギリシアに渡った数学には論理が持ち込まれ，仮定や既知の命題から新しい結論を演繹的に導きだすことがなされ，数学的知識が体系化された.
- 一方，インドの影響を受けたアラビアでは代数が発展した．アラビア代数はルネッサンス期にイタリアに渡りさらに発展した.

そして，17 世紀にヨーロッパで数学が爆発的な発展をみせる $\cdots$

§1) 数学の歴史

(1) 古代オリエントの数学

(2) ギリシア数学

(3) 中世の数学

(4) 17 世紀の数学

- 解析幾何学
- 微分積分学

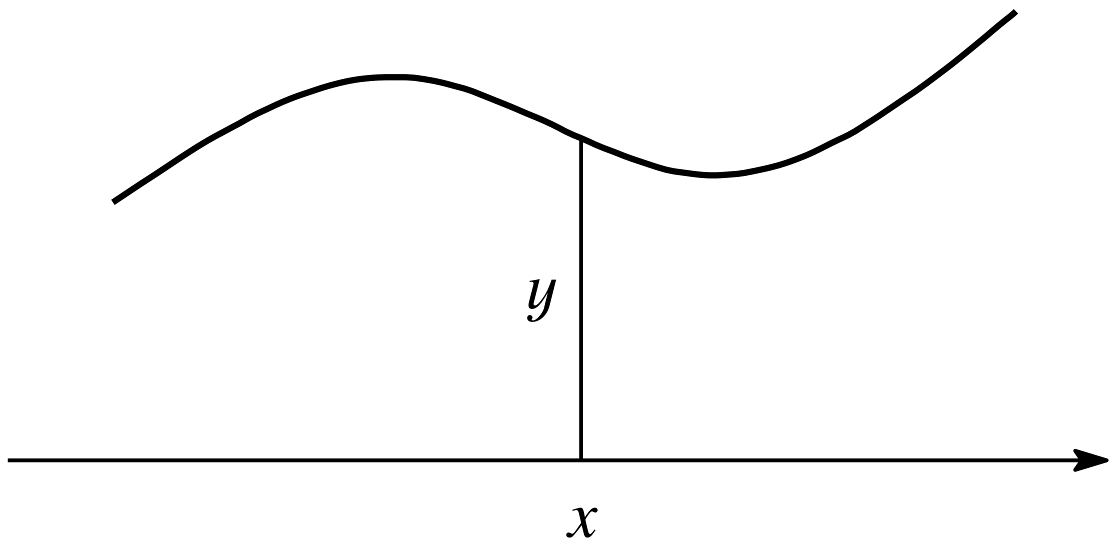
(5) 和算 ー 江戸時代・日本の数学

(6) 近代・現代の数学

1.4.1) 解析幾何学（座標幾何学）

- デカルトによる「座標」の考え方（直交座標，デカルト座標）.
- フェルマーも座標の概念にたどり着いていた.
- 代数的な演算により図形の解析が可能に．新たな図形の探求.

「図形」＝「代数方程式を満たす点の集合」

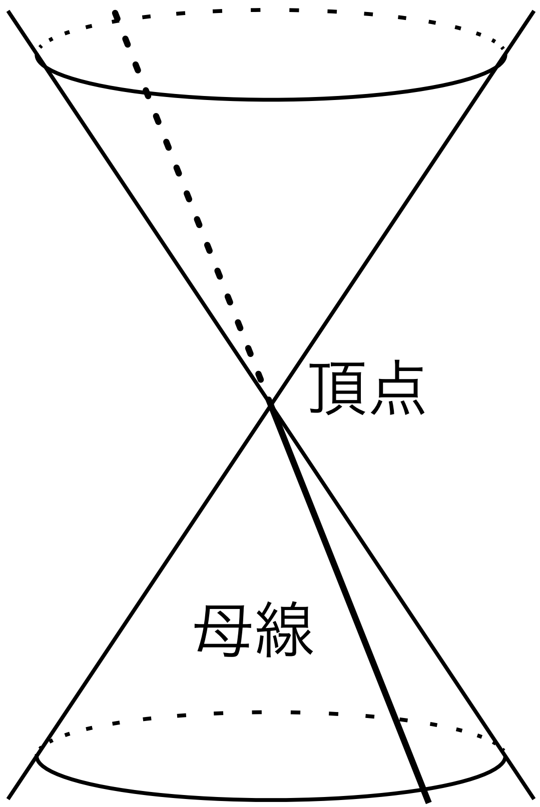


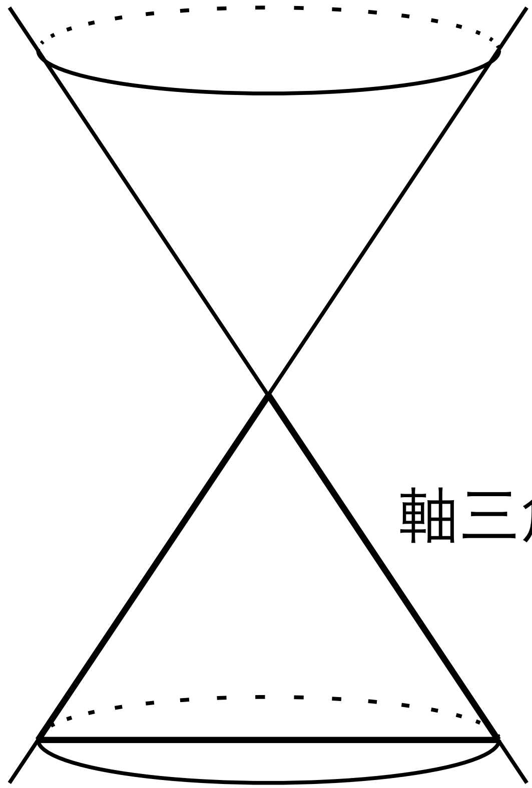
x が変化すると曲線までの “高さ”y も変化する.

1.4.1) 解析幾何学（座標幾何学）

円錐曲線　アポロニウス（紀元前 3 世紀頃）

- 円錐をある平面で切断した切り口の曲線として 放物線, 楕円, 双曲線 を発見した.





1.4.1) 解析幾何学（座標幾何学）

$\boxed{\text{放物線}}$ 母線に平行な平面で切断

ある直線 l と，l 上にない一点 F からの距離が等しい点 P の集合.

直線 l を $y = -a$, $F = (0, a)$, $P = (x, y)$ とすると $4ay = x^2$.

$\boxed{\text{楕　円}}$ 軸三角形の底辺以外の 2 辺と交点をもつように切断

2 点 A, B からの <u>距離の和が一定</u> である点 P の集合.

$A = (a, 0), B = (-a, 0)$, $AP + BP = 2c$, $P = (x, y)$ とすると $\dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$.

$\boxed{\text{双曲線}}$ 軸三角形の斜辺を延長した直線上で交点をもつように切断

2 点 A, B からの <u>距離の差が一定</u> である点 P の集合.

$A = (a, 0), B = (-a, 0)$, $|AP - BP| = 2d$, $P = (x, y)$ とすると $\dfrac{x^2}{d^2} - \dfrac{y^2}{a^2 - d^2} = 1$.

1.4.1) 解析幾何学（座標幾何学）

2 点 A, B からの 距離の◯◯ が一定である点 P の集合

- 和：楕円
- 差：双曲線
- 積：カッシーニの卵形線
- 比：円（アポロニウスの円）

1.4.2) 微分積分学

- ニュートンとライプニッツにより独立に創始された.
  - 実際にはニュートンが創始者とされている.
    （ライプニッツはニュートンのアイデアを盗んだ？）
  - 現在の表記法はライプニッツが考案したもの. $\dfrac{d}{dx}, \displaystyle\int f(x)\,dx$ など.
- 微分法　曲線の接線を求める方法.
- 積分法　図形の面積を求める方法.

微分積分法の基本定理

微分と積分は逆の関係である；

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$$

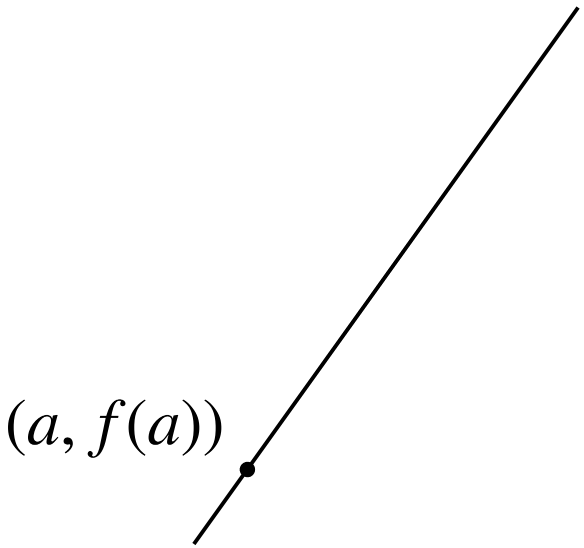
1.4.2.1) 微分法（流率法）

ニュートンの流率法 ： 曲線の接線の傾きを計算する方法.

- 曲線を運動する点の軌跡と考える.
- 曲線を拡大すると直線と見なすことができる.

  （つまり 無限に小さい時間の変化 に着目する）

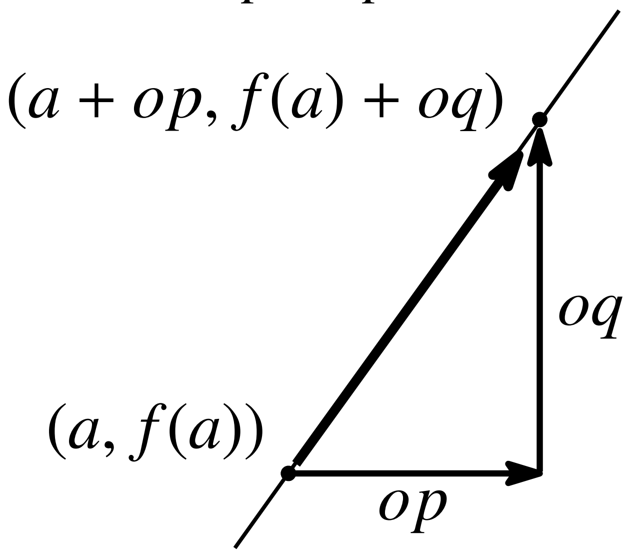
点 $(a, f(a))$ の付近を拡大



o 時間経つと $\cdots \longrightarrow$

“o” は「オミクロン」と読む

傾きは $\dfrac{oq}{op} = \dfrac{q}{p}$



1.4.2.1) 微分法（流率法）

例：$y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の傾きを求める.

$$y = x^2$$

$$(a^2 + oq) = (a + op)^2$$

：$(a + op, a^2 + oq)$ は $y = x^2$ 上にある.

$$a^2 + oq = a^2 + 2aop + o^2p^2$$

：上式右辺を展開.

$$oq = 2aop + o^2p^2$$

：両辺の a^2 を消去.

$$q = 2ap + op^2$$

：両辺を o で割る.

$$\frac{q}{p} = 2a + op$$

：両辺を p で割る.

$$\therefore \quad \frac{q}{p} = 2a$$

：o は無限に小さい数だから 無視する.

1.4.2.2) 積分法

積分法：図形の面積，立体の体積を求める方法.

- アルキメデス（紀元前 3 世紀）：放物線と直線に囲まれた領域の面積.
- ケプラー（16〜17 世紀）：ワイン樽の体積.
- カヴァリエリ（17 世紀）

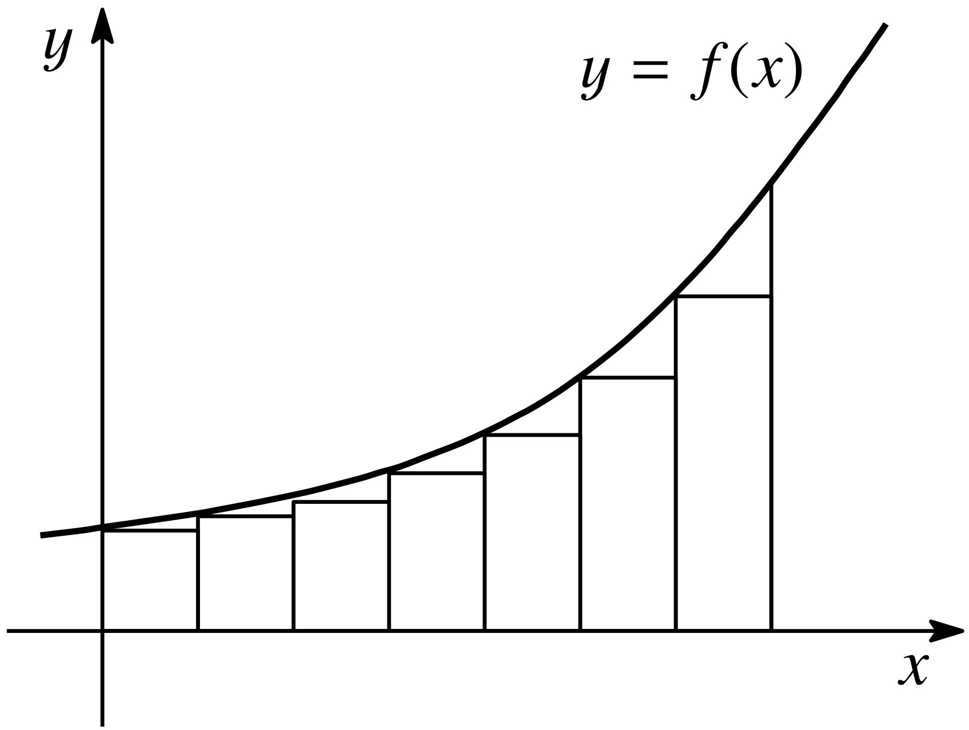
  「面」は「線」が連なったもの.「立体」は「面」が連なったもの.

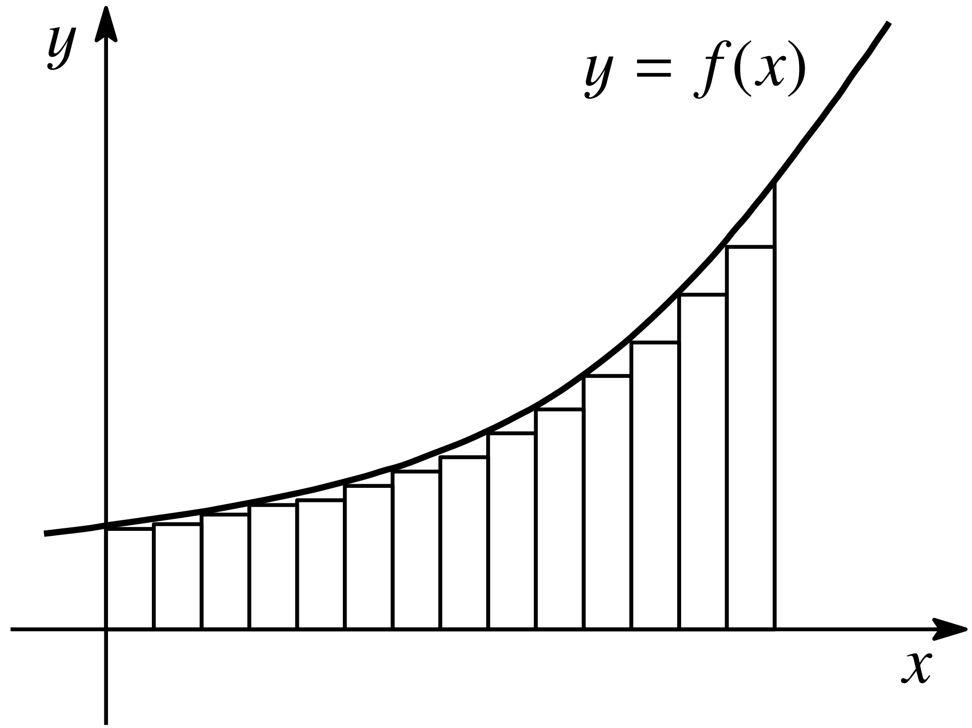
カヴァリエリの原理（不可分の方法）

2 つの平面図形 A, B が平行な 2 直線に挟まれているとする．この 2 直線に平行な任意の直線に対し，A との交わりの部分の長さと B との交わりの部分の長さが等しいならば，A の面積と B の面積は等しい.

1.4.2.2) 積分法

曲線 $y = f(x)$ と軸に囲まれた領域 D の面積＝長方形（短冊）の面積の和.

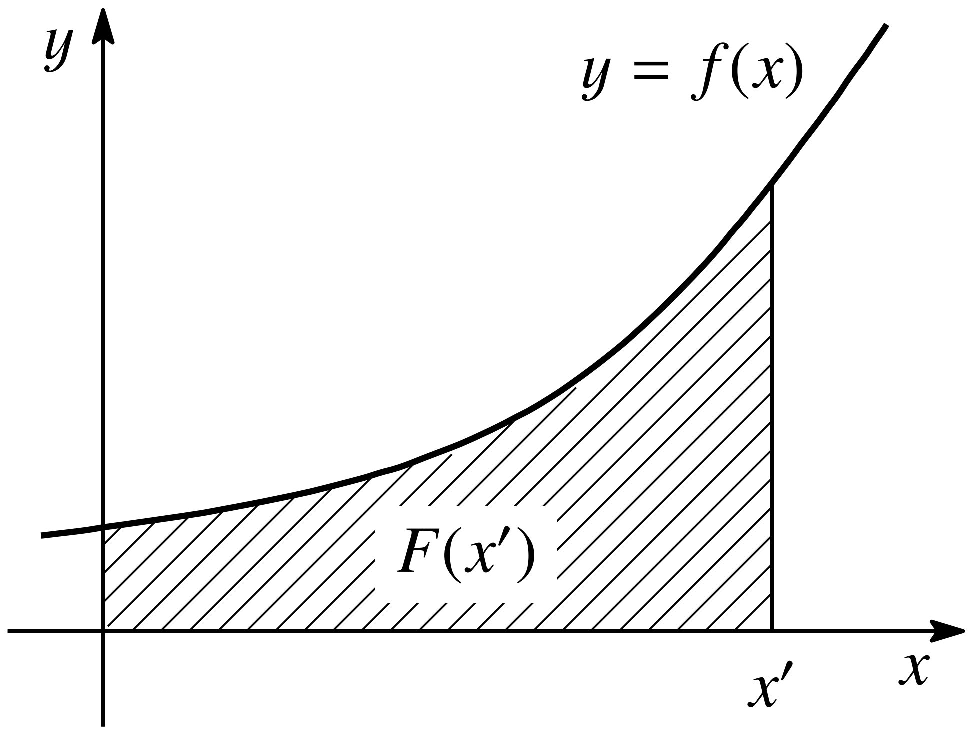




短冊の横幅の長さを限りなく小さい値にすれば，その面積の和は D の面積に近づく.

1.4.2.2) 積分法

一方，領域の面積も x の関数とみることができる（ニュートンの「流量」）.



この関数 $F(x)$ の微分が $f(x)$ に等しい（微分積分法の基本定理）.

1.4.2.3) 微分積分学のその後

- ニュートンとライプニッツの争い「創始者はだれだ」
- バークリ：微積分（無限小解析）の基礎は厳密性に欠けると批判
  「この流率とはなんだ？消えゆく増分の速度？その消えゆく増分とは何だ？有限の量でもなく，無限小の量でもなく，ましてや無でもない．今は亡き量の亡霊とでも呼ぼうか？」
- マクローリンが反論「証明を簡略化するため」
- ヤコブ，ヨハンのベルヌーイ兄弟：ライプニッツ流の微積分を広める．
- オイラー：関数の概念を明確に規定
- ラグランジュ：代数的操作で微積分（有限量の代数解析）
- コーシー（19 世紀）
  極限の概念を厳密に定義し（ϵ-δ 論法），微分積分の曖昧さを解消することに成功した．

1.5) 和算：日本の数学

- 17 世紀以降，江戸時代に発展した（中国の数学から影響）.
- 1627 年（寛永 4 年）吉田光由「塵劫記」
  - 数学の入門書としてベストセラー，ロングセラー.
  - 計算方法，そろばん，面積の求め方など実用数学を網羅.
  - 遊びの数学も.
  - 答えのない問題が掲載され，問題がどんどん追加．数百種類の版が出版された.
- 「算額」
  - 額や絵馬に数学の問題や解法を記して，神社や仏閣に奉納.
  - 多くの一般の市民（数学愛好家）も奉納.

1.5) 和算：日本の数学

- 関孝和（？– 1708）
  - 塵劫記を独学.
  - 中国の代数方程式の理論（天元術）を発展させ，筆算式の記号法を考案した.
  - 世界で最初に行列式の概念を提案.
  - 円周率を小数第 12 位まで計算し，近似分数 $\dfrac{355}{113}$ を得た.
  - ヤコブ・ベルヌーイと同時期にベルヌーイ数 B_n を発見.
    関数 $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ を $x = 0$ でテイラー展開したときの係数；
$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

非常に高度な数学が発展していた.

1.5) 和算：日本の数学

6 球連鎖の定理（フレデリック・ソディ，Nature, 1937）

外球 O_0 に内接し，かつ互いに接している 2 つの核球 O_1, O_2 があるとき，O_0 に内接し，O_1, O_2 と外接し，隣同士が外接する球の連鎖数は常に $\underline{6}$ となる.

入澤新太郎博篤によって相模国の寒川神社に奉納された算額 (1822)

外球の直径が 30 寸，核球の直径がそれぞれ 10 寸と 6 寸，連鎖球のひとつの直径が 5 寸であるとき，残りの球の直径を問う.

<u>答え</u>：15 寸，10 寸，3 寸 7 分 5 厘，2 寸 5 分，2 寸と 11 分の 8 寸.

実際には連鎖球の直径を一般的に求める公式が得られている.

参考文献

- 「無限のパラドクス」足立恒雄 著（講談社，ブルーバックス）
- 「マンガ おはなし数学史」佐々木ケン 原作・仲田紀夫 漫画（講談社，ブルーバックス）
- 「数学が歩いてきた道」志賀浩二 著（PHP 研究所，PHP サイエンス・ワールド新書）
- 「算法少女」遠藤寛子 著（筑摩書房，ちくま学芸文庫）
- 「これならわかる　ニュートンの大発見　微分と積分」（Newton 別冊）
- 「岩波数学辞典 第４版」日本数学会 編集（岩波書店）
- Wikipedia ：和算，関孝和