数学科教育法 テスト①の解答

問題 1-1

(1) 「2 つの変量[*1] x, y に対し，x の値をひとつ決めるごとに，y の値が定まるとき，y は x の関数である」といいます（高橋陽一郎 著「変化をとらえる」より）．問題の x と y は $y = |x|$ と書けるので，y は x の関数といえます．

(2) 例えば，$x = \dfrac{1}{2}$ に対し，$x^2 + y^2 = 1$ を満たす実数 y は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の 2 つ存在しますから，y は x の関数ではありません．

(3) y が x の関数で $y = f(x)$ を表されるとする．このとき，f の値域の元 y に対して $y = f(x)$ を満たす数 x がただ一つ定まるとき，x は y の関数となる．この関数を $f(x)$ の逆関数という．$0 \leq x \leq 2\pi$ で定義された関数 $f(x) = \sin x$ に対し，$\dfrac{1}{2} = \sin x$ を満たす数 x は $\dfrac{\pi}{6}$ と $\dfrac{5\pi}{6}$ の 2 つ存在する．したがって，この関数の逆関数は存在しない[*2]．

問題 1-2

(1)

$$\begin{aligned} y =& 3x^2 - 6kx + 6k^2 + 2k - 1 \\ =& 3(x-k)^2 + 3k^2 + 2k - 1. \end{aligned}$$

したがって，頂点の座標は $\underline{(k,\, 3k^2 + 2k - 1)}$．

(2) $\underline{y = 3x^2}$

(3) C_k は k の変化によって平行移動するだけで，形は変わらない．したがって，C_k は下に凸なので，頂点の y 座標が最小のとき $S(k)$ が最大となる．頂点の y 座標を $q(k)$ とおくと，

$$\begin{aligned} q(k) =& 3k^2 + 2k - 1 \\ =& 3\left(k + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

であるから，$q(k)$ の最小値を与えるのは $\underline{k = -\dfrac{1}{3}}$ のときである．

---

*1 高校の教科書では変量や変数という言葉を使わず，「いろいろな値をとれる文字」と表現することもあります．

*2 定義域を $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ などにすれば，$f(x)$ の逆関数は存在する．

（**2012.4.18** 担当：佐藤）