線形代数「連立方程式」解答

1 連立方程式

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = -1 \\ 2y + 2z = 6 \\ x + 3z = 1 \end{cases}$$

の拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

この行列は適当な行基本変形により

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

とできます（これ以上は簡略化できない）．これは，消去法によって元の連立方程式が

$$\begin{cases} x \quad +3z = 1 \\ \quad y \; +z = 3 \end{cases}$$

まで，簡略できることを意味します．2 式に共通する未知数 z を $z = k$（k は任意定数）とおくことにより，$x = 1 - 3k$，$y = 3 - k$ となります．つまり，連立方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k \text{ は任意の実数})$$

となります．

2 連立方程式

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 1 \\ -x + 2y - z = 5 \\ x + 3z = 1 \end{cases}$$

の拡大係数行列を適当に行基本形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となります．この行列の第 3 行は

$$0 = 0x + 0y + 0z = 1$$

を意味し，矛盾します．このような場合，この連立方程式の解は存在しません．

線形代数「連立方程式」解答

Mathematica で実験してみよう

未知数が 3 つ，式が m 個の連立 1 次方程式の問題は「空間内の m 個の平面の交点を求めること」に他なりません．*Mathematica* で空間内の平面を描画し，それらの位置関係がどうなっているのか調べてみよう．

- 方程式 $ax + by + cz = d$ の平面を描画する命令は `ContourPlot3D` を使います．
  `ContourPlot3D[a x + b y + c z == d, {x, `*xmin*`, `*xmax*`}, {y, `*ymin*`, `*ymax*`}, {z, `*zmin*`, `*zmax*`}]`
- 等号を表すのは「`==`」であることに注意してください（「`=`」は代入を意味する）．
- 複数の図形を描画する場合は，方程式を「{　}」で囲み，コンマで区切ります．
- 例えば $\boxed{\mathbf{1}}$ の場合は
  `ContourPlot3D[ {2 x - y + 5 z == -1, 2 y + 2 z == 6, x + 3 z == 1}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, {z, -10, 10}]`